ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ $G(n)$ В ПРОБЛЕМЕ ВАРИНГА

И. М. ВИНОГРАДОВА

Обозначим символом $G(n)$) известную функцию, выражающую наименьшее целое s с условием: существует такое $N' > 0$, зависящее только от n, что всякое целое $N \geq N'$ может быть представлено в виде суммы s слагаемых вида t^n, где t целое ≥ 0, но не всякое целое $N \geq N'$ может быть представлено в виде суммы $s - 1$ слагаемых того же вида.

В моих последних работах[1] был развит новый метод решения проблем аналитической теории чисел, причем для функции $G(n)$ последовательно были получены следующие оценки

$$G(n) = O((n \lg n)^2); \quad G(n) = O(n^2).$$

Здесь, несколько изменяя доказательство, я получаю

$$G(n) = O(n \lg n)$$

или, более точно

$$G(n) < 6n \lg n + (\lg 216 + 4) n.$$

Этот результат замечателен тем, что дает почти исчерпывающее решение вопроса о порядке $G(n)$. Действительно из известного неравенства $G(n) > n$ следует, что порядок функции $G(n)$ не может быть ниже, чем $O(n)$.

Краткое изложение моего нового результата уже дано в одной из моих последних работ.[2] Здесь я даю подробное изложение.

1. Обозначения и леммы.

Примем следующие обозначения:

n целое постоянное > 3

$$\nu = \frac{1}{n}; \quad \delta = \frac{\nu^2}{8}; \quad k = [2n \lg n + n \lg 6]; \quad \sigma = n(1 - \nu)^k$$

[1] ДАН, 1934, т. II, № 6, стр. 337—341; т. III, № 1, стр. 1—6. Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, 1934, t. 199, № 3, p. 174—175.

[2] ДАН, 1934, т. IV, № 5—6.

$c', c, c_0, c_1, \ldots$ вещественные, зависящие только от n

$\theta', \theta, \theta_1, \ldots$ числа, модуль которых не превосходит 1.

$A \ll B$, $B \gg A$, или $A = O(B)$ при положительном B обозначает, что $|A| \leqq c' B$.

Если z вещественное, то (z) обозначает расстояние z до ближайшего целого.

$$N_0 \text{ целое } > 0;\ P = [3^{-1} N_0^{\nu} + 1];\ P_1 = [n^{\nu} P^{1-\nu}];$$

$$R = [P^{1-\frac{\nu}{2}}];\ R_1 = [n^{\nu} R^{1-\nu}]$$

$$Y = [P^{\frac{\nu-\nu^2}{2}}];\ N \text{ целое};\ N_0 - N_0 P^{-\frac{1}{4}} < N \leqq N_0;\ \tau = 2n\, 3^{n-1} P^{n-\frac{1}{2}}$$

$N_0 > c_0$; c_0 считаем выбранным так (что возможно), чтобы было

(1) $$N_0 \geqq 64 \cdot 3^{n-4} P^n;\ Y^n \leqq 2^{-1} \sqrt{P} \text{ и } \tau \leqq P^n.$$

Кроме того при q целом > 0 и $(a, q) = 1$ полагаем

$$D_{aq} = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} r^n};\ A_q(N) = \sum_a D_{aq}^{4n} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}$$

причем в последней формуле a пробегает приведенную систему вычетов по модулю q.

Леммы, на которые опирается мое доказательчтво общеизвестны. В частности они уже встречались в моих предыдущих работах, посвященных теореме Варинга. Поэтому я привожу их здесь без доказательств.

Лемма A. Имеем

$$D_{aq} \ll q^{-\nu}.$$

Лемма B. Имеем

$$\sum_{q=1}^{\sqrt{P}} A_q(N) = b(N) + O(P^{-1}),$$

причем, $b(N) > c_1$, где $c_1 > 0$.

Лемма C. Пусть в интервале $g \leqq t \leqq h$ имеем

$$0 \leqq f'(t) \leqq \frac{1}{2};\ f''(t) > 0.$$

Тогда, взяв одновременно знаки $+$, или же знаки $-$, будем иметь

$$\sum_{t>g}^{h} e^{\pm 2\pi i f(t)} = \int_g^h e^{\mp 2\pi i f(t)}\, dt + 5\theta'.$$

Лемма D. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{4n-2}$ независимо друг от друга пробегают целые положительные числа. Тогда число решений неравенства

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{4n-2}^n \leqq V$$

выразится формулой

$$c_2 V^{4-2\nu} + O(v^{4-3\nu}); \quad c_2 > 0.$$

Лемма E. Если G и H целые, причем $G < H$; λ вещественное нецелое, то

$$\left| \sum_{x>G}^{H} e^{2\pi i \lambda x} \right| < \frac{1}{2(\lambda)}.$$

2. Метод составления чисел u.

Составим числа

$$s_1 = 1^n, 2^n, \ldots P_1^n$$

Наибольшая из разностей между двумя последовательными значениями числа s_1 будет

$$\leqq P_1^n - (P-1)^n < nP_1^{n-1}.$$

Между каждыми двумя последовательными значениями s_1' и s_1'' числа s_1 мы вставим числа вида

$$s_1 + w^n$$

где w пробегает все целые значения, удовлетворяющие условию

$$0 < w^n < s_1'' - s_1'.$$

Дополнив этими числами ряд чисел s_1, мы получим новый ряд чисел s_2. Числа s_2 друг на друга не налегают. Из способа заполнения промежутка между числами s_1' и s_1'' следует, что наибольшая из разностей между двумя последовательными значениями s_2, удовлетворяющими условию

$$s_1' \leqq s_2 \leqq s_1''$$

будет

$$\leqq \{(s_1'' - s_1')^\nu\}^n - \{(s_1'' - s_1')^\nu - 1\}^n < n(nP_1^{n-1})^{\nu(n-1)} \leqq$$
$$\leqq n^{1+(1-\nu)} P_1^{(n-1)(1-\nu)}.$$

Следовательно той же величины не превосходит и разность между каждыми двумя последовательными значениями s_2. С числами s_2 повторим ту же операцию, что и с числами s_1. Получим числа s_3, далее числа $s_4, s_5, \ldots$, наконец числа $\xi = s_{k-1}$.

Числа ξ друг на друга не налегают и удовлетворяют условию

$$1 \leqq \xi < P_1^n.$$

Разность между каждыми двумя последовательными значениями ξ будет

$$< n^{1+(1-\nu)+(1-\nu)^2+\ldots+(1-\nu)^{k-2}} P_1^{(n-1)(1-\nu)^{k-2}} < n^n P_1^{n(1-\nu)^{k-1}}.$$

Число всех значений ξ будет

$$> n^{-n} P_1^{n-n(1-\nu)^{k-1}} \geqslant P^{n-1-\sigma}.$$

Число u заставим пробегать значения

$$u = \xi + v^n$$

где независимо друг от друга ξ пробегает только что составленные значения и v пробегает значения

$$v = P, P+1, \ldots, 2P-1.$$

Нетрудно видеть, что числа u друг на друга не налегают и удовлетворяют условию

$$P^n < u < 2^n P^n.$$

Число их X удовлетворяет условию

$$X \geqslant P^{n-\sigma}.$$

Точно таким же способом как сейчас при помощи чисел P и P_1 мы составляли числа ξ, v и наконец u, при помощи чисел R и R_1 мы составим числа ξ_1, v_1 и u_1. При этом число значений u_1 обозначим символом X_1.

3. Основной интеграл.

Полагая

$$T_\alpha = \sum_{x=1}^{3P} e^{2\pi i \alpha x^n}; \quad S_\alpha = \sum_u e^{2\pi i \alpha u}; \quad S_{1\alpha} = \sum_{y=1}^{Y} \sum_{u_1} e^{2\pi i \alpha y^n u_1},$$

рассмотрим интеграл

$$I_N = \int_0^1 T_\alpha^{4n-2} S_\alpha^2 S_{1\alpha} e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

где интервал интегрирования можно заменить таким $-\tau^{-1} \leqq \alpha \leqq 1 - \tau^{-1}$. Любое α из последнего интервала представляется в форме

$$(2) \qquad \alpha = \frac{a}{q} + z; \quad (a, q) = 1; \quad 1 \leqq q \leqq \tau; \quad |z| \leqq \frac{1}{q\tau}.$$

Мы разобьем этот интервал на интервалы двух классов:

к классу I отнесем интервалы, в которых

$$\alpha = \frac{a}{q} + z;\ (a, q) = 1;\ 1 \leqq q \leqq \sqrt{P};\ -\tau^{-1} \leqq z \leqq \tau^{-1}.$$

К классу II отнесем оставшиеся интервалы.

Нетрудно видеть, что интервалы I класса друг на друга не налегают. Кроме того они заключают в себе все значения α, которые можно представить в форме (2) с значением $q \leqq \sqrt{P}$. Поэтому всякое α, принадлежащее интервалу II класса можно представить в форме (2) с значением $q > \sqrt{P}$.

Соответственно указанной разбивке интервала интегрирования на два класса интеграл I_N представится в виде суммы двух слагаемых

$$I_N = H_1 + H_2.$$

4. Оценка H_2.

Если α принадлежит одному из интервалов II класса, то имеем

$$\sqrt{P} < q \leqq \tau \leqslant P^{n-\frac{1}{2}};\ Y < \left(\frac{q}{2}\right)^{\nu}.$$

Находим

$$S_{1\alpha} \leqslant \sqrt{X_1 \sum_{x=1}^{2^n R^n} \left| \sum_{y=1}^{Y} e^{2\pi i \alpha y^n x} \right|} = \sqrt{X_1 \sum_{y=1}^{Y} \sum_{y_1=1}^{Y} \left| \sum_{x=1}^{2^n R^n} e^{2\pi i \alpha (y^n - y_1^n) x} \right|} \leqslant \sqrt{X_1 \Omega}$$

где

$$\Omega = \sum_{y=1}^{Y} \sum_{y_1=1}^{Y} \min(R^n, (\alpha t)^{-1});\ t = y^n - y_1^n.$$

Имеем $|t| < \frac{q}{2}$. Далее число решений уравнения

$$y^n - y_1^n = 0$$

будет Y. Поэтому часть суммы Ω, отвечающая случаю $t = 0$, равна

$$YR^n.$$

При t неравном нулю число решений уравнения

$$y^n - y_1^n = t$$

будет $\leqslant q^{\delta}$. Кроме того ввиду $(a, q) = 1$ и $|t| < \frac{q}{2}$ наименьший положительный вычет r числа at по модулю q отличен от нуля, причем неравным значениям t отвечают и неравные значения r.

Модули s абсолютно наименьших вычетов числа at по модулю q, отвечающие значениям t неравным нулю, также неравны нулю, причем s может принимать одно и то же численное значение $\leqslant q^{\delta}$ раз.

Замечая, что

$$(\alpha t)^{-1}=\left(\frac{at}{q}+\frac{\theta t}{q\tau}\right)^{-1}=\left(\frac{s}{q}+\frac{\theta_1 q}{2q}\right)^{-1}\geqslant\frac{q}{s},$$

убеждаемся, что часть суммы Ω, отвечающая значениям t, неравным нулю, будет

$$\leqslant\sum_{s=1}^{q}\frac{q^{1+\delta}}{s}\leqslant q^{1+2\delta}.$$

Собирая все доказанное, имеем

$$S_{1\alpha}\leqslant\sqrt{X_1(YR^n+q^{1+2\delta})}\leqslant X_1\,Y\sqrt{R^n X_1^{-1}\,Y^{-1}}$$

что ввиду пункта 2

$$\leqslant X_1\,Y\sqrt{R^\sigma\,Y^{-1}}\leqslant X_1\,YP^{\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\frac{\sigma}{2}-\frac{\nu}{4}+\frac{\nu^2}{8}}.$$

Замечая это, находим

$$H_2\leqslant P^{4n-2}X_1\,YP^{\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\frac{\sigma}{2}-\frac{\nu}{4}+\frac{\nu^2}{8}}\int_0^1\sum_u\sum_{u'}e^{2\pi i\alpha(u-u')}\,d\alpha.$$

Но участвующий здесь интеграл равен

$$X\leqslant X^2P^{-n}P^\sigma$$

и потому

$$H_2\leqslant P^{3n-2}X^2X_1\,YP^{\frac{3}{2}\sigma-\frac{\nu\sigma}{4}-\frac{\nu}{4}+\frac{\nu^2}{8}}.$$

Имеем далее

$$\frac{\nu}{4}-\frac{\nu^2}{8}-\frac{3}{2}\sigma+\frac{\nu\sigma}{4}=\frac{\nu}{4}\left(1-\frac{\nu}{2}-6n\sigma+\sigma\right);$$

$$\lg(6n\sigma-\sigma)<\lg 6+2\lg n-k\left(\nu+\frac{\nu^2}{2}\right)-\frac{\nu}{6}\leqq\lg 6+2\lg n-$$

$$-\frac{2n\lg n+n\lg 6-1}{n}-\frac{2n\lg n+n\lg 6-1}{2n^2}-\frac{\nu}{6}<-\frac{5}{4}\nu$$

$$6n\sigma-\sigma<1-\nu;\quad\frac{\nu}{4}\left(1-\frac{\nu}{2}-6\,n\sigma+\sigma\right)>\delta.$$

Поэтому будет

$$H_2\leqslant P^{3n-2}X^2X_1\,YP^{-\delta}.$$

5. Интервалы I класса. Сумма T_α и ей подобные.

Обращаясь к вычислению H_1, найдем асимптотическое выражение для суммы T_α, при условии, что α принадлежит интервалу I класса. Введем подстановку

$$x = qt + r;\ r = 0, 1 \ldots, q - 1,$$

где при каждом данном r число t пробегают значения, удовлетворяющие неравенствам

$$-rq^{-1} < t \leqq (3P - r)q^{-1}. \tag{3}$$

Выражение для T_α примет вид

$$T_\alpha = \sum_{r=0}^{q-1}\sum_t e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)(qt+r)^n} = \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{a}{q}r^n} K_r;$$

$$K_r = \sum_t e^{2\pi i z q^n (t+rq^{-1})^n},$$

где t пробегает значения интервала (3). Но в этом интервале функция

$$f(t) = |z|\, q^n (t + rq^{-1})^n$$

удовлетворяет условиям леммы C. Поэтому

$$K_r = \int_{-rq^{-1}}^{(3P-r)q^{-1}} e^{2\pi i z q^n (t+rq^{-1})^n}\, dt + 5\theta_2 = \frac{\rho(z)}{q} + 5\theta_2;\ \ \rho(z) = \int_0^{3P} e^{2\pi i z x^n}\, dx.$$

Ввиду этого последнее выражение для T_α примет вид

$$T_\alpha = \rho(z) D_{aq} + O(q). \tag{4}$$

Далее нетрудно видеть, что всегда

$$\rho(z) \leqslant P.$$

Если же

$$|z| \geqq P^{-n}$$

то удобнее пользоваться другим легко выводимым неравенством

$$\rho(z) \leqslant |z|^{-\nu}.$$

Поэтому полагая

$$Z = P \text{ при } |z| \leqq P^{-n};\ Z = |z|^{-\nu} \text{ при } |z| \geqq P^{-n}$$

будем всегда иметь

$$\rho(z) \leqslant Z.$$

Ввиду этого и леммы A главный член правой части равенства (4)

$$\leqslant Zq^{-\nu}, \text{ что } \geqslant P^{1-\frac{\nu}{2}} q^{-\nu} \geqq q.$$

Из равенства (4) легко найдем

$$T_\alpha^{4n-2} = \{\rho(z)\}^{4n-2} D_{aq}^{4n-2} + O(Z^{4n-3} q^{-3+3\nu}), \tag{5}$$

где главный член

$$\leqslant Z^{4n-2} q^{-4+2\nu}, \text{ что } \geqslant Z^{4n-3} q^{-3+3\nu}.$$

Подобно сумме T_α рассмотрится и сумма

$$V_\alpha = \sum_{v=P}^{2P-1} e^{2\pi i \alpha v^n}$$

причем окажется

$$V_\alpha = \rho_0(z) D_{aq} + O(q); \ \rho_0(z) = \int_P^{2P} e^{2\pi i z x^n} dx, \tag{6}$$

где главный член правой части

$$\leqslant P, \text{ что } \geqslant q.$$

Наконец рассмотрим сумму

$$V_{y\alpha} = \sum_{v_1=R}^{2R-1} e^{2\pi i \alpha y^n v_1^n}; \ 1 \leqq y \leqq Y.$$

Получим

$$V_{y\alpha} = \rho_y(z) \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} y^n r^n} + O(q); \ \rho_y(z) = \int_R^{2R} e^{2\pi i z y^n x^n} dx.$$

Но имеем

$$\sum_{v_1=R}^{2R-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} y^n v_1^n} = \frac{R}{q} \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} y^n r^n} + O(q)$$

откуда

$$\frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} y^n r^n} = \frac{1}{R} \sum_{v_1=R}^{2R-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} y^n v_1^n} + O\left(\frac{q}{R}\right).$$

Поэтому

$$V_{y\alpha} = \frac{\rho_y(z)}{R} \sum_{v_1=R}^{2R-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} y^n v_1^n} + O(q) \tag{7}$$

где главный член

$$\leqslant R, \text{ что } \geqslant q.$$

6. Оценка сумм S_α и $S_{1\alpha}$.

Находим

$$U_\alpha = \sum_\xi e^{2\pi i\alpha\xi} = \sum_\xi e^{2\pi i \frac{a}{q}\xi} + O(|z|XP^{n-2}),$$

где главный член

$$\leqslant XP^{-1}, \text{ что } \geqslant |z|XP^{n-2}.$$

Отсюда и из формулы (6) находим

$$S_\alpha = V_\alpha U_\alpha = \rho_0(z) D_{aq} \sum e^{2\pi i \frac{a}{q}\xi} + O(X|z|P^{n-1} + XP^{-1}q),$$

где главный член

$$\leqslant X, \text{ что } \geqslant X|z|P^{n-1} + XP^{-1}q.$$

Отсюда выводим

(8) $$S_\alpha^{\,2} = \Big(\rho_0(z) D_{aq} \sum_\xi e^{2\pi i \frac{a}{q}\xi}\Big)^2 + O(X^2|z|P^{n-1} + X^2P^{-1}q),$$

где главный член

$$\leqslant X^2, \text{ что } \geqslant X^2|z|P^{n-1} + X^2P^{-1}q.$$

Находим далее

(9) $$U_{y\alpha} = \sum_{\xi_1} e^{2\pi i\alpha y^n \xi_1} = \sum_{\xi_1} e^{2\pi i \frac{a}{q} y^n \xi_1} + O(W),$$

где

$$W = X_1 R^{-1}|z| Y^n R^{n-1} \leqslant X_1 R^{-1}|z| P^{\frac{1-\nu}{2} + \left(1-\frac{\nu}{2}\right)(n-1)} \leqslant X_1 R^{-1}|z|P^{n-1}.$$

Главный член в формуле (9)

$$\leqslant X_1 R^{-1}, \text{ что } \geqslant X_1 R^{-1}|z|P^{n-1},$$

Замечая это из формул (7) и (9), находим

(10) $$S_{1\alpha} = \sum_{y=1}^{Y} V_{y\alpha} U_{y\alpha} = \sum_{y=1}^{Y} \frac{\rho_y(z)}{R} \sum_{u_1} e^{2\pi i \frac{a}{q} y^n u_1} + O(X_1 Y|z|P^{n-1} + X_1 YqR^{-1}),$$

причем главный член

$$\leqslant X_1 Y, \text{ что } \geqslant X_1 Y|z|P^{n-1} + X_1 YqR^{-1}.$$

7. Вычисление H_1.

Ввиду

$$N_0 - N_0 P^{n-\frac{1}{4}} < N \leqq N_0$$

имеем

$$e^{-2\pi i\alpha N} = e^{-2\pi i \frac{a}{q} N - 2\pi i z N_0} + O\left(|z| P^{n-\frac{1}{4}}\right),$$

отсюда и из формул (5), (8) и (10) находим

$$T_\alpha^{4n-2} S_\alpha S_{1\alpha} e^{-2\pi i\alpha N} = \left(\{\rho(z)\}^{4n-2} D_{aq}^{4n-2} + O(Z^{4n-3} q^{-3+3\nu})\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\left\{\rho_0(z) D_{aq} \sum_\xi e^{2\pi i \frac{a}{q}\xi}\right\}^2 + O(X^2 |z| P^{n-1} + X^2 P^{-1} q)\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\sum_{y=1}^{Y} \frac{\rho_y(z)}{R} \sum_{u_1} e^{2\pi i \frac{a}{q} y^n u_1} + O\left(X_1 Y |z| P^{n-1} + X_1 Y q R^{-1}\right)\right) \cdot$$
$$\cdot \left(e^{-2\pi i \frac{a}{q} N - 2\pi i z N_0} + O\left(|z| P^{n-\frac{1}{4}}\right)\right),$$

где главные члены сомножителей, стоящих в больших скобках, соответственно

$$\leqslant Z^{4n-2} q^{-4+2\nu}; \ \leqslant X^2; \ \leqslant X_1 Y; \ \leqslant 1,$$

причем согласно пункту 5 имеем

$$Z = P \text{ при } |z| \leqq P^{-n} \text{ и } Z = |z|^{-\nu} \text{ при } |z| \geqq P^{-n}.$$

Отсюда находим

$$T_\alpha^{4n-2} S_\alpha S_{1\alpha} e^{-2\pi i\alpha N} = \sum_{y=1}^{Y} E_y F_y + L, \tag{11}$$

где

$$E_y = D_{aq}^{4n} \left(\sum_\xi e^{2\pi i \frac{a}{q}\xi}\right)^2 \sum_{u_1} e^{2\pi i \frac{a}{q} y^n u_1} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}$$

и F_y зависит только от z, y, n и N_0. Далее

$$L \leqslant Z^{4n-2} q^{-4+2\nu} X^2 X_1 Y \left(Z^{-1} q^{1+\nu} + |z| P^{n-1} + P^{-1} q + |z| P^{n-1} + \right.$$
$$\left. + q P^{-1+\frac{\nu}{2}} + |z| P^{n-\frac{1}{4}}\right) \leqslant X^2 X_1 Y Z^{4n-2} P^{-\frac{1}{4}} q^{-3} (|z| P^n + 1).$$

Умножая (11) на dz и интегрируя в пределах от $z = -\tau^{-1}$ до $z = \tau^{-1}$ убеждаемся, что часть H_1, отвечающая интервалу с данными a и q равна

$$\sum_{y=1}^{Y} E_y Q_y + L_1,$$

где Q_y зависит только от y, n и N_0. Далее

$$L_1 \leqslant X^2 X_1 Y P^{-\frac{1}{4}} q^{-3} \left\{ \int_0^{P-n} P^{4n-2} dz + \int_{P-n}^{\tau-1} P^n z^{-3+2\nu} dz \right\} \leqslant X^2 X_1 Y P^{3n-2-\frac{1}{4}} q^{-3}.$$

Ввиду изложенного, заставляя число a пробегать числа ряда $0, 1, \ldots, q-1$ взаимно простые с q и далее число q пробегать все значения, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < q \leqq \sqrt{P},$$

получим

$$H_1 = \sum_{y=1}^{Y} Q_y \sum_{q=1}^{\sqrt{P}} \sum_a E_y + O\left(X^2 X_1 Y P^{3n-2-\frac{1}{4}}\right).$$

8. Общее выражение для I_N.

Собирая доказанное в пунктах 4 и 7, имеем

$$I_N = \sum_{y=1}^{Y} Q_y B_y + O(X^2 X_1 Y P^{3n-2-\delta}); \; B_y = \sum_{q=1}^{\sqrt{P}} \sum_a E_y$$

где

$$E_y = D_{aq}^{4n} \left(\sum_{\xi} e^{2\pi i \frac{a}{q} \xi} \right)^2 \sum_{u_1} e^{2\pi i \frac{a}{q} y^n u_1} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}.$$

9. Оценка Q_y.

Обозначая символом I_{yN} часть интеграла I_N, отвечающую данному y, мы подобно I_N представим I_{yN} ввиде суммы двух слагаемых

(12) $$I_{yN} = H_{1y} + H_{2y}.$$

К H_{1y} применим те же самые рассуждения, которые выше применяли к H_1. Очевидно получим (отсутствует только суммирование по y)

$$H_{1y} = Q_y B_y + O\left(X^2 X_1 P^{3n-2-\delta}\right).$$

Равенство (12) просуммируем на все целые N, удовлетворяющие неравенствам

$$N_0 - N_0 P^{-\frac{1}{4}} < N \leqq N_0.$$

Результат суммирования левой части очевидно равен числу решений системы неравенств

(13) $$N_1 - N_0 P^{-\frac{1}{4}} < M \leqq N_1,$$

где

$$N_1 = N_0 - u - u' - y^n u_1; \; M = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{4n-2}^n$$

причем значения, которые пробегают u, u', u_1, x_1, x_2, . . . , x_{4n-2} очевидны из рассмотрения I_{yN}. Ввиду (1) имеем

$$N_0 \geqq \frac{64}{81}\left(\frac{3}{2}\right)^n 2^n P^n \geqq 4 \cdot 2^n P^n.$$

Далее находим

$$u + u' + y^n u_1 < 3 \cdot 2^n P^n; \; N_1 > 2^n P^n$$

В виду этого и леммы D убеждаемся, что при данном N_1 число решений неравенства

$$M \leqq N_1$$

будет

$$c_2 N_1^{4-2\nu} + O(P^{4n-3}),$$

и число решений неравенства

$$M \leqq N_1 - N_0 P^{-\frac{1}{4}}$$

будет

$$c_2 \left(N_1 - N_0 P^{-\frac{1}{4}}\right)^{4-2\nu} + O(P^{4n-3}).$$

Поэтому при данном N_1 число решений системы (13) будет

$$c_2 \left\{N_1^{4-2\nu} - \left(N_1 - N_0 P^{-\frac{1}{4}}\right)^{4-2\nu}\right\} + O(P^{4n-3}),$$

что при всех N_0, превосходящих некоторое $c_3 \geqq c_0$, будет

$$\gg P^{3n-2} N_0 P^{-\frac{1}{4}}.$$

Отсюда следует, что общее число решений системы (13) будет

$$\gg X^2 X_1 P^{3n-2} N_0 P^{-\frac{1}{4}}.$$

Теперь просуммируем правую часть равенства (12). Сначала просуммируем H_{1y} и в первую очередь ту его часть, которая отвечает случаю $q = 1$. Последняя равна

$$Q_y X^2 X_1 P^{-2}$$

и ее суммирование на все вышеуказанные значения N даст

$$Q_y X^2 X_1 P^{-2} \{N_0 P^{-\frac{1}{4}} + O(1)\}.$$

Далее просуммируем часть H_{1y}, отвечающую какому-либо $q>1$. Согласно лемме E имеем

$$\left|\sum_N e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}\right| < \frac{1}{2\left(\frac{a}{q}\right)}.$$

А так как

$$E_y \leqslant X^2 X_1 P^{-2} q^{-4}; \quad \sum_a \frac{1}{2\left(\frac{a}{q}\right)} < q \lg q,$$

то результат суммирования указанного члена будет

$$\leqslant |Q_y| X^2 X_1 P^{-2} q^{-2}.$$

Из сказанного уже не трудно видеть, что результат суммирования H_{1y} будет

$$Q_y X^2 X_1 P^{-2} \left\{ N_0 P^{-\frac{1}{4}} + O(1) \right\} + O\left(X^2 X_1 P^{3n-2-\delta} N_0 P^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Переходя к суммированию H_{2y} заметим, что в интервалах II класса будет

$$(\alpha) \geqq \tau^{-1} \geqslant P^{-n+\frac{1}{2}}$$

Поэтому

$$\sum_N e^{-2\pi i \alpha N} \leqslant \frac{1}{(\alpha)} \leqslant P^{n-\frac{1}{2}}.$$

Замечая это, находим

$$\sum_N H_{2y} \leqslant P^{4n-2} X_1 P^{n-\frac{1}{2}} \int_0^1 \sum_u \sum_{u'} e^{2\pi i \alpha (u-u')}\, d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant P^{4n-2} X X_1 P^{n-\frac{1}{2}} \leqslant P^{4n-2} X^2 X_1 P^{\sigma-\frac{1}{2}},$$

что ввиду

$$\lg \sigma < \lg n - k\nu < -\lg n - \lg 6 + \nu < -\lg 8; \quad \sigma - \frac{1}{2} < \frac{1}{8} - \frac{1}{2} < -\frac{3}{8}$$

будет

$$\leqslant X^2 X_1 P^{4n-2} P^{-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}} \leqslant X^2 X_1 P^{3n-2-\delta} N_0 P^{-\frac{1}{4}}.$$

Собирая все доказанное убеждаемся, что суммирование всей правой части равенства (12) даст

$$Q_y X^2 X_1 P^{-2} \left\{ N_0 P^{-\frac{1}{4}} + O(1) \right\} + O\left(X^2 X_1 P^{3n-2-\delta} N_0 P^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Вспоминая, что результат суммирования левой части вещественное число

$$\geqslant X^2 X_1 P^{3n-2} N_0 P^{-\frac{1}{4}}$$

убеждаемся, что

$$Q_y = C_y \{1 + O(P^{-\delta})\},$$

где C_y вещественное, причем

$$C_y \geqslant P^{3n}.$$

10. Оценка B_y.

Из выражения для E_y, данного в пункте 8, следует, что

$$E_y = \sum_{N_2} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N_2} D_{aq}^{4n},$$

где

$$N_2 = N - \xi - \xi' - y^n u_1.$$

Поэтому

$$B_y = \sum_{N_2} \sum_{q=1}^{\sqrt{P}} A_q(N_2),$$

что ввиду леммы B равно

$$\sum_{N_2} b(N_2) + O(X^2 X_1 P^{-3}).$$

Здесь главный член вещественное число, которое

$$\geqslant X^2 X_1 P^{-2}.$$

Следовательно

$$B_y = J_y \{1 + O(P^{-1})\},$$

где J_y вещественное, причем

$$J_y \geqslant X^2 X_1 P^{-2}.$$

11. Вывод теоремы Варинга.

После доказанного в пунктах 9 и 10 формула пункта 8 дает (полагаем теперь $N = N_0$)

$$I_{N_0} \geqslant \sum_{y=1}^{Y} C_y J_y \{1 + O(P^{-\delta})\} + O(X^2 X_1 Y P^{3n-2-\delta})$$

где $C_y J_y$ вещественное, причем

$$C_y J_y \geqslant X^2 X_1 P^{3n-2}.$$

Отсюда очевидно, что при всех значениях $N_0 \geqq c$, где c достаточно большое $\geqq c_8$, будем иметь

$$I_{N_0} \geqslant X^2 X_1 P^{8n-2} Y.$$

Следовательно $I_{N_0} > 0$. Но I_{N_0} есть число представлений N_0 в форме

$$N_0 = u + u' + y^n u_1 + x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{4n-2}^n \tag{14}$$

где все обозначения имеют прежний смысл. Значит N_0 хоть одним способом представляется в форме (14). Следовательно оно является суммою

$$3k + 4n - 2 = 3\,[2n \lg n + n \lg 6] + 4n - 2 < 6n \lg n + (\lg 216 + 4)\,n$$

слагаемых вида t^n, где $t \geqq 0$. Мы доказали теорему:

Теорема. Пусть $n > 3$ целое

$$s = [n\,(6 \lg n + \lg 216 + 4)].$$

Тогда существует такое положительное постоянное c, зависящее только от n, что всякое целое

$$N \geqq c$$

можно представить в форме

$$N = t_1^n + t_2^n + \ldots + t_s^n,$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_s$, целые $\geqq 0$.

Математический институт Академии Наук
им. В. А. Стеклова. Москва.

I. VINOGRADOW. ON THE UPPER BOUND OF $G(n)$ IN WARINGS PROBLEM

SUMMARY

In the present paper I give the new estimation of the well known function $G(n)$ of Warings Problem. I prove that

$$G(n) < 6n \lg n + (\lg 216 + 4)\,n$$

The short notice on this result is just published.* I develope here the details of the method.

V. Stekloff Mathematical Institute
of the Academy of Sciences of the USSR. Moscow.

---

* Comptes Rendus de l' Academie des Sciences de l'URSS, 1934, t. IV. № 5-6.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О КОРНЯХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Р. О. КУЗЬМИНА

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В 1932 г. К. Зигель* опубликовал формулу, доказательство которой он восстановил по черновикам Римана. Она имеет такой вид:

$$\rho(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\int\limits_{0\swarrow 1}\frac{x^{-s}\,e^{\pi i x^2}}{e^{\pi x i}-e^{-\pi x i}}\,dx + \pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\int\limits_{0\nwarrow 1}\frac{x^{s-1}\,e^{-\pi i x^2}}{e^{\pi x i}-e^{-\pi x i}}\,dx. \quad (1)$$

Здесь положено для краткости: $\rho(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$, а интегрирование совершается по прямым, параллельным биссектрисам координатных углов и пересекающим вещественную ось между точками: $x = 0$, $x = 1$.

Эта формула, важная по своим применениям в теории функции Римана $\zeta(s)$, замечательным образом ускользнула от внимания ученых, занимавшихся этой теорией. Все же одно равенство, тесно связанное с формулой (1), было дано мной в работе, напечатанной в 1930 г.** По виду оно значительно отличается от формулы (1). Вот оно:

$$\rho\cdot(s) = -\frac{e^{\frac{\pi i s}{4}}}{s} - \frac{e^{\frac{\pi i(s-1)}{4}}}{1-s} + e^{\frac{\pi i s}{4}}\sum_{1}^{\infty}\int\limits_{1}^{\infty}e^{-\pi n^2 x i}\,x^{\frac{s}{2}-1}\,dx +$$
$$+ e^{\frac{\pi i(s-1)}{4}}\sum_{1}^{\infty}\int\limits_{1}^{\infty}e^{\pi n^2 x i}\,x^{\frac{1-s}{2}-1}\,dx. \quad (2)$$

При этом предполагается, что $s = \frac{1}{2} + ti$; $t > 0$.

* C. L. Siegel. Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Bd. II, 1, 1932, SS. 45—80.

** Р. О. Кузьмин. К теории одного класса рядов Дирихле. Изв. Акад. Наук, 1930, стр. 115—124.

Связь равенств (2) и (1) состоит в том, что каждое из слагаемых формулы (2) равно соответствующему слагаемому формулы (1), которое получается, если разложить интегралы в ряд с помощью известного разложения на простейшие дроби:

$$\frac{1}{e^{\pi i x}-e^{-\pi i x}}=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{x}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2}\right]. \qquad (3)$$

Возможность перехода от формулы (2) к формуле (1) весьма ценна в силу того, что вывод формулы (2) основан на простых соображениях довольно общего характера, которые легко могут быть применены во многих других случаях.

В настоящей работе я получаю таким путем формулы, подобные формуле Римана (1), но относящиеся к теории рядов Дирихле $L(s)$. Кроме того я даю применение найденных мною формул к изучению распределения корней функций $L(s)$, а именно я доказываю следующую теорему:

Если обозначить через $N(T)$ число корней функции $L(s)$, имеющих вид:

$$s=\frac{1}{2}+ti;\quad 0<t<T,$$

то справедливо неравенство:

$$N(T)>0.084T+O\left(T^{0,9}\right) \qquad (4)$$

Теорема подобного рода раньше доказана была лишь для функции $\zeta(s)$, и притом дважды — в первый раз это сделали Харди и Литтльвуд,* а второй раз К. Зигель в уже упомянутой работе. При этом следует отметить, что обе эти работы получают результат путем искусной комбинации крайне тонких рассуждений. Метод, применяемый мной, хотя во многом и близок к методу К. Зигеля, но существенно отличается от него, так как мне удалось обойтись несколько более простыми средствами.

Постоянную 0.084 можно было бы заменить несколько большей, но я не сделал этого, так как это улучшение точности не имеет принципиальной важности, а усложнение метода, связанное с этим улучшением, довольно значительное.

§ 1. Суммы, стоящие в формуле (2), можно преобразовать, интегрируя по частям. Таким образом находим, например:

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{1}^{\infty}e^{-\pi n^2 x i}x^{\frac{s}{2}-1}dx=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi n^2 i}+\left(\frac{s}{2}-1\right)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2 i}\int_{1}^{\infty}e^{-\pi n^2 x i}x^{\frac{s}{2}-2}dx. \qquad (5)$$

Интеграл в правой части равенства аналитическая функция s, если $\sigma<4$.

* G. H. Hardy and I. Littlewood. The zeros of Riemann's Zeta-Function on the critical line. Mathematische Zeitschrift, Bd. 10, 1921, pp. 283—317.

Если же $\sigma < 2$, то он по абсолютной величине не превосходит постоянной величины $\int\limits_1^\infty x^{\frac{\sigma}{2}-2}\,dx$, равной $\frac{2}{2-\sigma}$. Поэтому при $\sigma < 2 - \delta$ ряд в левой части (5) равномерно сходится. Таким же образом убеждаемся, что при $\sigma > -1 + \delta$ равномерно сходится и другой ряд, имеющийся в формуле (2). Здесь δ — произвольно малая положительная постоянная. Отсюда в виду аналитичности функции $\rho(s)$ следует, что формула (2) остается в силе во всей области переменного $s = \sigma + ti$, определяемой условиями: $-1 < \sigma < 2$; $t > 0$.

Будем полагать, что σ удовлетворяет более ограничительным условиям: $0 < \sigma < 1$. Рассмотрим при этом величину одного из слагаемых формулы (2). При этом, пользуясь очевидными преобразованиями и теорией функции гамма, находим:

$$\begin{aligned} I = \int\limits_1^\infty e^{-\pi n^2 xi} x^{\frac{s}{2}-1}\,dx = (-1)^n \int\limits_0^\infty e^{-\pi n^2 xi} (1+x)^{\frac{s}{2}-1}\,dx = \\ = \frac{(-1)^n}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} \int\limits_0^\infty e^{-\pi n^2 xi}\,dx \int\limits_0^\infty e^{-\tau(1+x)} \tau^{-\frac{s}{2}}\,d\tau = \\ = \frac{(-1)^n}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} \int\limits_0^\infty e^{-\tau} \tau^{-\frac{s}{2}}\,d\tau \int\limits_0^\infty e^{-x(\tau+\pi n^2 i)}\,dx = \\ = \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sin\frac{\pi s}{2}}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\tau} \tau^{-\frac{s}{2}}\,d\tau}{\tau + \pi n^2 i}. \end{aligned} \tag{6}$$

Заменяя τ на πx^2, получаем:

$$I = \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sin\frac{\pi s}{2} \int\limits_0^\infty e^{-\pi x^2} x^{-s} \cdot \frac{2x\,dx}{x^2 + n^2 i}. \tag{7}$$

Обозначим через c путь, состоящий из прямой, проведенной справа налево, параллельно вещественной оси и пересекающей мнимую ось между точками $x = 0$ и $x = -i$. В таком случае очевидно равенство:

$$\int\limits_c \frac{e^{-\pi x^2} x^{-s}\,dx}{x^2 + n^2 i} = 2ie^{\frac{\pi si}{2}} \sin\frac{\pi s}{2} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\pi x^2} x^{-s} \cdot 2x\,dx}{x^2 + n^2 i}. \tag{8}$$

Сопоставление (7) и (8) дает равенство:

$$I = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) e^{-\frac{\pi si}{2}} \int\limits_c \frac{x^{-s} e^{-\pi x^2}\,2x\,dx}{x^2 + n^2 i}. \tag{9}$$

Заменяя здесь x на $ze^{-\frac{\pi i}{4}}$, переименовывая z на x, получаем:

$$I = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) e^{-\frac{\pi s i}{4}} \int_{0\swarrow 1} x^{-s} \frac{e^{\pi x^2 i}\, 2x\, dx}{x^2 - n^2}. \tag{10}$$

Из равенств (6), (8), (9) и (10) следует:

$$e^{\frac{\pi s i}{4}} \sum_1^\infty \int_1^\infty e^{-\pi n^2 x i} x^{\frac{s}{2}-1} dx = \frac{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{2\pi i} \sum_1^\infty (-1)^n \int_{0\swarrow 1} \frac{x^{-s} e^{\pi x^2 i}\, 2x\, dx}{x^2 - n^2}. \tag{11}$$

Подобным образом легко доказать равенство:

$$-\frac{e^{-\frac{\pi s i}{4}}}{s} = \frac{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{2\pi i} \int_{0\swarrow 1} x^{-s} e^{\pi x^2 i} \cdot \frac{dx}{x}. \tag{12}$$

Поэтому, применяя законную в данном случае перестановку знаков суммы и интеграла и пользуясь (3) находим:

$$-\frac{e^{\frac{\pi i s}{4}}}{s} + e^{\frac{\pi i s}{4}} \sum_1^\infty \int_1^\infty e^{-\pi n^2 x i} x^{\frac{s}{2}-1} dx = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \int_{0\swarrow 1} \frac{x^{-s} e^{\pi x^2 i}}{e^{\pi x i} - e^{-\pi x i}}. \tag{13}$$

Точно также при соблюдении условий $0 < \sigma < 1$, $t > 0$ легко доказывается формула:

$$-\frac{e^{\pi i (s-1)}}{1-s} + e^{\pi i (s-1)} \sum_1^\infty \int_1^\infty e^{\pi n^2 x i} x^{\frac{1-s}{2}-1} dx = \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \int_{0\nwarrow 1} \frac{x^{s-1} e^{-\pi x^2 i}}{e^{\pi x i} - e^{-\pi x i}}. \tag{14}$$

С помощью равенств (13) и (14) формула (2), данная мной, превращается в формулу Римана (1). Последняя имеет по сравнению с формулой (2) уже то преимущество, что она дает представление для $\rho(s)$, годное на всей плоскости.

§ 2. Формула, подобная формуле (2), может быть получена и для рядов Дирихле $L(s)$, определяемых при $\sigma > 0$ равенством:

$$L(s) = \sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{15}$$

где $\chi(n)$ собственный характер по нечетному модулю D.

При этом величина $\chi(-1)$ как известно может равняться лишь одному из чисел ± 1. Положим: $\frac{1-\chi(-1)}{2} = a$ и введем следуя Е. Ландау* функцию $\psi(x, \chi)$ с помощью равенства:

$$\psi(x, \chi) = 2 \sum_1^\infty \chi(n)\, n^a\, e^{\frac{-\pi n^2 x}{D}}. \tag{16}$$

* E. Londau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 1909, Bd. I, § 127—128, SS. 481—498.

Эта функция обладает свойством симметрии, которое выражается равенством:

$$\psi\left(\frac{1}{x}, \chi\right) = \varepsilon(\chi)\, x^{\frac{1}{2}+a}\, \psi(x, \overline{\chi}). \tag{17}$$

Здесь $\overline{\chi}(n)$ — характер, сопряженный с характером $\chi(n)$. Число $\varepsilon(\chi)$ по абсолютной величине равно единице.

Положив $\xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi)$, получаем равенство:

$$\xi(s, \chi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \psi(x, \chi)\, x^{\frac{s+a}{2}-1}\, dx. \tag{18}$$

Интеграл в правой части можно взять по прямой, исходящей из начала координат и образующей с положительной частью вещественной оси острый угол, положительный или отрицательный. Пусть $x = \alpha$ точка на этой прямой, причем $\alpha = \rho e^{\varphi i}$; $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$. В таком случае имеем:

$$\xi(s, \chi) = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \psi(x, \chi)\, x^{\frac{s+a}{2}-1}\, dx + \frac{1}{2}\int_\alpha^\infty \psi(x, \chi)\, x^{\frac{s+a}{2}-1}\, dx. \tag{19}$$

В первом из этих интегралов положим $x = \frac{1}{\xi}$. Преобразовавши подинтегральную функцию с помощью (17) и переименовавши ξ в x, можем переписать равенство (19) в таком виде:

$$\xi(s, \chi) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\infty \psi(x, \chi)\, x^{\frac{s+a}{2}-1}\, dx + \frac{\varepsilon(\chi)}{2}\int_{\frac{1}{\alpha}}^\infty \psi(x, \overline{\chi})\, x^{\frac{1-s+a}{2}-1}\, dx. \tag{20}$$

При этом путь интегрирования второго интеграла идет от точки $x = \frac{1}{\alpha}$ и составляет с положительным направлением вещественной оси угол, равный $-\varphi$.

В виду абсолютной сходимости интегралов и рядов, получающихся при разложении функции $\psi(x, \chi)$ с помощью (17), можно интегрировать почленно. Если при этом положить еще, что $\rho = 1$, то получается:

$$\begin{aligned} \xi(s, \chi) = {} & e^{\frac{s+a}{2}\varphi i} \sum_1^\infty \chi(n)\, n^a \int_1^\infty e^{\frac{-\pi n^2 r e^{\varphi i}}{D}}\, r^{\frac{s+a}{2}-1}\, dr + \\ & + \varepsilon(\chi)\, e^{\frac{s-1-a}{2}} \sum_1^\infty \overline{\chi}(n)\, n^a \int_1^\infty e^{\frac{-\pi n^2 r e^{-\varphi i}}{D}}\, r^{\frac{1-s+a}{2}-1}\, dr. \end{aligned} \tag{21}$$

Интегрируя по частям, подобно тому, как было сделано при получении равенства (5), нетрудно убедиться, что, напр., при $0 < \sigma < 1$ ряды в (21) равномерно сходящиеся при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Поэтому в (21) можно положить $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и тогда получается равенство:

$$\xi(s,\chi) = e^{\frac{\pi(s+a)i}{4}} \sum_{1}^{\infty} \chi(n) n^a \int_1^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2 x i}{D}} x^{\frac{s+a}{2}-1} dx + \\ + \varepsilon(\chi) e^{\frac{\pi(s-1-a)i}{4}} \sum_{1}^{\infty} \bar{\chi}(n) n^a \int_1^{\infty} e^{\frac{\pi n^2 x i}{D}} x^{\frac{1-s+a}{2}-1} dx. \tag{22}$$

Оно имеет то же значение в теории рядов $L(s)$, как и равенство (2) в теории $\zeta(s)$. В частности из него можно получить укороченное функциональное уравнение для $L(s)$. Вычисления, которые понадобятся при этом, столь же просты, как и примененные мной в работе: «К теории одного класса рядов Дирихле». (Пользуюсь здесь случаем отметить, что в этой работе по недосмотру в окончательной формуле § 3 пропущен множитель $e^{\frac{-\pi i}{4}}$, и такой же промах имеется в окончательной формуле § 4.) За время, протекшее с 1930 г. это укороченное уравнение получено одним европейским ученым, применившим повидимому несколько другой метод, близкий к несколько более сложному методу Харди и Литтльвуда.*

В ближайшем параграфе я с помощью (22) получу для рядов $L(s)$ формулу, подобную посмертной формуле Римана (1) для $\zeta(s)$.

§ 3. Поступая подобно тому, как в § 1, находим при $0 < \sigma < 1$ равенство:

$$I = \int_1^{\infty} e^{\frac{-\pi n^2 x i}{D}} x^{\frac{s+a}{2}-1} dx = e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}} \int_0^{\infty} e^{\frac{-\pi n^2 x i}{D}} (1+x)^{\frac{s+a}{2}-1} dx = \\ = \frac{e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}}{\pi} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \sin\frac{\pi(s+a)}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau} \tau^{-\frac{s+a}{2}} d\tau}{\tau + \frac{\pi n^2 i}{D}}. \tag{23}$$

Положив: $\tau = \frac{\pi}{D} x^2$, получаем:

$$I = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \sin\frac{\pi(s+a)}{2} e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}} \int_0^{\infty} e^{\frac{-\pi x^2}{D}} x^{-(s+a)} \frac{2x dx}{x^2 + n^2 i}. \tag{24}$$

* G. H. Hardy and I. Littlewood. The approximate functional equation in the theory of the Zeta-function, with applications to the divisor-problem of Dirichlet and Piltz. Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 21, 1922, p. 39—74.

Новое приложение приемов § 1 дает формулу:

$$I=\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}{2\pi i}\,e^{\frac{-\pi(s+a)i}{4}}\int\limits_{0\swarrow 1} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}}\,x^{-(s+a)}\,\frac{2x\,dx}{x^2-n^2}. \tag{25}$$

Поэтому в равенстве (22) имеем:

$$\begin{gathered}e^{\frac{\pi i}{4}(s+a)}\sum_1^\infty \chi(n)n^a\int\limits_1^\infty e^{\frac{-\pi n^2 x i}{D}}\,x^{\frac{s+a}{2}-1}\,dx=\\=\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\sum_1^\infty\int\limits_{0\swarrow 1}\chi(n)n^a\,e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}\,\frac{e^{\frac{\pi x^2 i}{D}}x^{-(s+a)}\,2x\,dx}{x^2-n^2}\end{gathered} \tag{26}$$

Для дальнейшего важно исследовать функцию $\varphi(x,\chi)$, определяемую равенством:

$$\varphi(x,\chi)=\frac{1}{2\pi i}\sum_1^\infty \chi(n)e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}\,n^a\,\frac{2x}{x^2-n^2} \tag{27}$$

Заметим прежде всего, что во всякой конечной области, не заключающей ни внутри, ни на границе точек: $x=\pm n$, ряд в формуле (27) сходится равномерно.

Для доказательства этого рассмотрим область S указанного типа, расположенную в круге: $|x|=r$ и исследуем величину суммы

$$\sum_M^{M+p}\chi(n)n^a\,e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}\,\frac{2x}{x^2-n^2},\ \text{где } M>2r.$$

Пользуясь тождеством: $\frac{2x}{x^2-n^2}=-\frac{2x}{n^2}-\frac{2x^3}{n^4\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)}$, находим:

$$\sum_M^{M+p}\chi(n)n^a\,e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}\,\frac{2x}{x^2-n^2}=-2x\sum_M^{M+p}\frac{\chi(n)}{n^{2-a}}e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}+\theta\cdot\frac{8}{3}\sum_M^\infty\frac{1}{n^3}r^3. \tag{28}$$

Здесь $|\theta|<1$ и поэтому остаточный член очевидно меньше, чем $\frac{4r^3}{M^2}$.

Для оценки другой суммы, стоящей в правой части (28) перепишем ее в таком виде:

$$\begin{gathered}\sum_M^{M+p}\frac{\chi(n)}{n^{2-a}}e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}=\sum_{m=0}^{D-1}\chi(m)\sum_\nu\frac{e^{\frac{-\pi(D\nu+m)^2 i}{D}}}{(D\nu+m)^{2-a}}=\\=\sum_{m=0}^{D-1}\chi(m)e^{\frac{-\pi m^2 i}{D}}\sum_\nu\frac{(-1)^\nu}{(D\nu+m)^{2-a}}.\end{gathered} \tag{29}$$

Наименьшее значение $D\nu + m$ не меньше, чем M, поэтому имеем:

$$\left|\sum_{m=0}^{D-1} \chi(m) e^{\frac{-\pi m^2 i}{D}} \sum_{\nu} \frac{(-1)^\nu}{(D\nu + m)^{2-a}}\right| < \sum_{m=0}^{D-1} \frac{1}{M} = \frac{D}{M}. \tag{30}$$

Следовательно ряд (27) сходящийся, и сумма M первых его членов отличается от его суммы на величину меньшую, чем $\frac{rD}{M} + \frac{4r^2}{M^2}$, если $M > 2r$.

Из сказанного следует, что функция $\varphi(x, \chi)$ аналитическая на всей плоскости, кроме точек $x = \pm n$, где она имеет полюсы первого порядка с вычетами, равными $\frac{\chi(n)}{n^s}$.

Важно еще изучить характер возрастания функции $\varphi(x, \chi)$ при удалении точки x от начала координат. Для этого в равенстве (27) положим $|x| = r$ и перепишем его в такой форме:

$$\varphi(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{M} \chi(n) e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}} n^a \frac{2x}{x^2 - n^2} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{M+1}^{\infty} \chi(n) n^a e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}} \frac{2x}{x^2 - n^2} \tag{31}$$

При этом согласно доказанному величина второй суммы при $M > 2r$ по абсолютной величине меньше, чем $\frac{Dr}{M} + \frac{4r^3}{M^2}$. Если $|x| = r$ и притом $|x - n| > \frac{1}{2}$ при всяких n, меньших $M + 1$, то

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \sum_{1}^{M} \chi(n) n^a e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}} \frac{2x}{x^2 - n^2}\right| < \frac{1}{2\pi} \frac{2r}{\frac{1}{2}} \sum_{1}^{M} n < M^2 r. \tag{32}$$

При $M = 2r$ равенства (32) и (31) в связи со сказанным дают оценку

$$\varphi(x, \chi) = O(|x|^3) \tag{33}$$

Здесь подразумевается, что $|x|$ неограниченно возрастает, а число x отличается от любого из чисел натурального ряда не меньше, чем на $\frac{1}{2}$.

Нетрудно видеть, что оценка, устанавливаемая равенством (33), остается в силе и в том случае, если величину $\varphi(x, \chi)$ заменить суммой любого числа первых членов ряда для $\varphi(x, \chi)$. Условие $|x - n| > \frac{1}{2}$, наложенное для простоты вывода, несущественно. При замене $\frac{1}{2}$ любой положительной величиной равенство (33) остается в силе, только постоянная, входящая в знак O, изменится.

После этих предварительных соображений нетрудно показать, что в равенстве (26) можно переставить знак суммы и интеграла. Для этого прежде всего находим:

$$\sum_{n=1}^{M}\int\limits_{0\swarrow 1} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}} x^{-(s+a)} \frac{e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}\chi(n)\,n^a}{2\pi i}\cdot\frac{2x\,dx}{x-n^2}=$$

$$=\int\limits_{0\swarrow 1} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}} x^{-(s+a)}\frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{M}\frac{\chi(n)n^a e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}\,2x\,dx}{x^2-n^2}. \tag{34}$$

Путь интегрирования разбиваем на участки: C_1, на котором $|x|<r$, где $r=\sqrt{M}>2$ и C_2 и C_3, на которых $|x|>r$.

На C_1 имеем:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{M}\frac{\chi(n)n^a e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}\,2x}{x^2-n^2}-\varphi(x,\chi)\right|<\frac{rD}{2\pi M}+\frac{4r^3}{2\pi M^2}<\frac{rD}{M}. \tag{35}$$

На C_2 и C_3 применим неравенство:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{M}\frac{\chi(n)n^a e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}\,2x}{x^2-n^2}-\varphi(x,\chi)\right|=O(|x|^3)+O(|x|^3). \tag{36}$$

Опо ытекает из (33) и дополнительных замечаний к нему. При этом имеем кроме того: $e^{\frac{\pi x^2 i}{D}}=O\left(e^{\frac{-2|x|^2}{D}+A|x|}\right)$, где A — некоторая постоянная. Поэтому из (34), (35) и (36) получается:

$$\sum_{n=1}^{M}\int\limits_{0\swarrow 1} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}} x^{-(s+a)} \frac{\chi(n)n^{\gamma} e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}}{2\pi i}\frac{2x\,dx}{x^2-n^2}-\int\limits_{0\swarrow 1} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}} x^{-(s+a)}\varphi(x,\chi)\,dx=$$

$$=\frac{r}{M}O\left(\int_0^r e^{\frac{-\tau^2}{1}+A\tau}d\tau\right)+O\left(\int_r^{\infty} e^{\frac{-2\tau^2}{D}+A\tau}\tau^{3+a-\sigma}d\tau\right)=O\left(\frac{r}{M}+r^{r+a-\sigma}e^{\frac{-2r^2}{D}}\right). \tag{37}$$

Так как $r=\sqrt{M}$, то в правой части (37) можно поставить величину $O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$. При $I\to\infty$ отсюда получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0\swarrow 1} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}} x^{-(s+a)}\frac{\chi(n)n^a e^{\frac{-\pi n^2 i}{D}}\,2x\,dx}{2\pi i(x^2-n^2)}=\int\limits_{0\swarrow 1} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}} x^{-(s+a)}\varphi(x,\chi)\,dx. \tag{38}$$

Благодаря этому (26) принимает вид:

$$e^{\frac{\pi i}{4}(s+a)}\sum_{1}^{\infty}\chi(n)n^{a}\int_{1}^{\infty}e^{\frac{-\pi n^{2}xi}{D}}x^{\frac{s+a}{2}-1}dx=\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\int_{0\swarrow 1}e^{\frac{\pi x^{2}i}{D}}x^{-(s+a)}\varphi(x,\chi)dx. \quad (39)$$

Таким же образом можно доказать при $|0<\sigma<1|$ равенство:

$$\varepsilon(\chi)e^{\frac{\pi i}{4}(s-1-a)}\sum_{1}^{\infty}\bar{\chi}(n)n^{a}\int_{1}^{\infty}e^{\frac{\pi n^{2}xi}{D}}x^{\frac{1-s+a}{2}-1}dx=$$
$$=\varepsilon(\chi)\left(\frac{\pi}{D}\right)^{\frac{s-1-a}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)\int_{0\nwarrow 1}e^{\frac{-\pi x^{2}i}{D}}x^{s-1-a}\varphi(x,\bar{\chi})dx. \quad (40)$$

Складывая (39) и (40) и вспоминая (22), получаем:

$$\xi(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\int_{0\swarrow 1}e^{\frac{\pi x^{2}i}{D}}x^{-(s+a)}\varphi(x,\chi)dx+$$
$$+\varepsilon(\chi)\left(\frac{\pi}{D}\right)^{\frac{s-1-a}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)\int_{0\nwarrow 1}e^{\frac{-\pi x^{2}i}{D}}x^{s-1-a}\varphi(x,\bar{\chi})dx. \quad (41)$$

Полагая $\varepsilon(\chi)=e^{-2\omega i}$ и умножая (41) на $e^{\omega i}$, можем написать:

$$e^{\omega i}\xi(s,\chi)=e^{\omega i}\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\int_{0\swarrow 1}e^{\frac{\pi x^{2}i}{D}}x^{-(s+a)}\varphi(x,\chi)dx+$$
$$+e^{-\omega i}\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{1-s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)\int_{0\nwarrow 1}e^{-\frac{\pi x^{2}i}{D}}x^{s-1-a}\varphi(x,\bar{\chi})dx. \quad (42)$$

Формула (42) получена при условии $0<\sigma<1$. Однако нетрудно убедиться, что функция $f(s,\chi)$, определяемая равенством:

$$f(s,\chi)=\int_{0\swarrow 1}e^{\frac{\pi x^{2}i}{D}}x^{-(s+a)}\varphi(x,\chi)dx \quad (43)$$

аналитическая на всей плоскости. То же относится и к другому интегралу в (42). Поэтому формула (42) справедлива на всей плоскости переменного s.

§ 4. Формула (42) в теории рядов $L(s)$ имеет то же значение, что и формула Римана (1) в теории $\zeta(s)$. В частности с ее помощью можно получить некоторые результаты относительно распределения корней $L(s)$. Этому и будут посвящены ближайшие параграфы. Предварительно следует вывести одно представление для функции $f(s, \chi)$, введенной в § 3.

Для его получения применим теорему Коши. С ее помощью путь интегрирования можно перенести на любую другую линию, идущую в основном параллельно биссектрисе первого координатного угла, не удаляясь от нее неограниченно. Это возможно, так как в любой прямоугольной полосе, имеющей конечную ширину и параллельной биссектрисе первого координатного угла, подинтегральная функция в (43) равномерно стремится к нулю при удалении точки от вещественной оси. Естественно, что при этом придется принять во внимание вычеты подинтегральной функции.

Для составления нового пути интегрирования проведем прямую под углом 45° к вещественной оси так, чтобы она приходилась через седловинную точку функции $x^{-(s+a)} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}}$, т. е. точку $x = \eta$, определяемую уравнением:

$$\frac{dx^{-(s+a)} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}}}{dx} = 0. \text{ Отсюда получается: } \eta = \sqrt{\frac{D(s+a)}{2\pi i}}.$$

Корень берем так, чтобы его вещественная часть была положительна. Отметим еще на вещественной оси точку $x = \mu = \left[\sqrt{\frac{Dt}{2\pi}}\right]$. Участок проведенной прямой, точки которой отстоят от вещественной оси не далее, чем на единицу, заменим выпуклой кривой, пересекающей ось абсцисс между целыми точками: μ и $\mu + 1$. Эту кривую, проведем так, чтобы ни одна ее точка не приближалась к совокупности точек: $x = \pm n$ ближе, чем на половину. Контур, образованный оставшейся частью проведенной прямой и только что определенной кривой обозначим через C.

В таком случае по теореме Коши будем иметь:

$$f(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\mu} \frac{\chi(n)}{n^s} + \int_C e^{\frac{\pi x^2 i}{D}} x^{-(s+a)} \varphi(x, \chi)\, dx. \tag{44}$$

При изучении интеграла в правой части будем исходить из разложения:

$$\frac{\pi x^2 i}{D} - (s+a) \log x = \frac{\pi \eta^2 i}{D} - (s+a) \log \eta - \frac{2\pi z^2}{D} + \frac{2\pi i}{D} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n e^{\frac{\pi n i}{4}}}{n \eta^{n-2}}. \tag{45}$$

Здесь положено: $x = \eta + z e^{\frac{\pi i}{4}}$. Отсюда при $|z| < 0{,}72\,|\eta|$ получается:

$$\frac{\pi x^2 i}{D} - (s+a) \log x = \frac{\pi \eta^2 i}{D} - (s+a) \log \eta - \frac{\alpha z^2}{D}. \tag{46}$$

Величина α имеет вещественную часть большую, чем $\frac{2\pi}{7D}$.

Если же $|z| < \sqrt[3]{|\eta|}$, то из (45) следует:

$$\frac{\pi x^2 i}{D} - (s + a)\log x = \frac{\pi \eta^2 i}{D} - \frac{2\pi\eta^2 i}{D}\log\eta - \frac{2\pi z^2}{D} + 0(1). \tag{47}$$

Поэтому контур C разобьем на три части C_1, C_2, C_3, на которых величина $|z|$ будет заключена в одном из соответствующих интегралов:

$$(0, \sqrt[3]{|\eta|}), (\sqrt[3]{|\eta|}; 0.72\,|\eta|), (0.72\,|\eta|; \infty).$$

Так как t будем предполагать неограниченно растущим, то $|\eta|$ тоже будет неограниченно расти. Поэтому криволинейная часть C будет вся заключена в C_1.

В силу (47) получается, что на C_1 справедливо равенство:

$$e^{\frac{\pi x^2 i}{D}} x^{-(s+a)} = e^{\frac{\pi\eta^2 i}{D}} \eta^{-\frac{2\pi\eta^2 i}{D}} e^{-\frac{2\pi z^2}{D}} . O(1). \tag{48}$$

На C_2 будем благодаря (46), иметь:

$$\left|x^{-(s+a)} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}}\right| < \left|e^{\frac{\pi\eta^2 i}{D}} \eta^{-\frac{2\pi\eta^2 i}{D}} e^{-\frac{2\pi}{7D} z^2}\right|. \tag{49}$$

Благодаря (48) и (49), а также свойствам функции $\varphi(x, \chi)$ оказывается, что:

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_1} x^{-(s+a)} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}} \varphi(x, \chi)\,dx + \int\limits_{C_2} x^{-(s+a)} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}} \varphi(x, \chi)\,dx = \\ = O\left(e^{\frac{\pi\eta^2 i}{D}} \eta^{-\frac{2\pi\eta^2 i}{D}}\right) = O\left(t^{-\frac{\sigma}{2}}\right).\end{aligned} \tag{50}$$

Чтобы изучить интеграл, взятый по C_3, полезно разбить C_3 на две части выше оси абсцисс и ниже ее. На первой из них находим: $|x| > 1.5\,|\eta|$ и легко видеть, что

$$\left|x^{-(s+a)} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}}\right| < r^{-(\sigma+a)} e^{\varphi t - \frac{\pi r^2}{D}\sin 2\varphi}. \tag{51}$$

При этом $x = re^{\varphi i}$; $r > 1.5\,|\eta|$; $0 < \varphi < \frac{\pi}{r}$.

Легко доказать неравенство:

$$\varphi t - \frac{\pi r^2}{D}\sin 2\varphi < \frac{10 r^2}{3D}\sin\varphi - \frac{\pi r^2}{D}\sin 2\varphi \tag{52}$$

поэтому на верхней части C_3 имеем неравенство:

$$\left|x^{-(s+a)} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}}\right| < e^{-\frac{r^2 \sin\varphi}{D}} < e^{-\frac{r^2}{2D}}. \tag{53}$$

Учитывая, что для $\varphi(x, \chi)$ справедлива оценка (33) и что $\sin\varphi > \frac{1}{2}$, находим, что интеграл по верхней части C_3 есть величина такого же порядка, как и интеграл $\int\limits_{1.5|\eta|} e^{-\frac{r}{2D}} r^3 dr$. Последняя же очевидно есть величина низшего порядка, чем $t^{-\frac{\sigma}{2}}$.

При рассмотрении интеграла по нижней части C_3 следует разделить путь интегрирования на две части. Полагая $x = re^{-\varphi i}$, отнесем к первой части тот участок пути, где $\varphi < \frac{3\pi}{5}$, а на второй будет $\frac{3\pi}{5} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$. На первом из этих участков имеем: $\varphi > \frac{\pi}{4}$; $r > 1 + |\eta|$ (при достаточно больших t), $t > \frac{2\pi|\eta|^2}{D} - 1$, если $|\sigma|$ не превосходит некоторой константы и t достаточно велико. Поэтому имеем:

$$\log\left|x^{-(s+a)} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}}\right| < -\sigma\log r - \varphi t + \\ + \frac{\pi r^2 \sin 2\varphi}{D} < 1 - \sigma \lg r - \frac{2\pi|\eta|^2}{D} \cdot 0.78 + \frac{\pi(|\eta|^2+1)^2}{D}. \tag{54}$$

Отсюда следует, что на этом участке, при достаточно большом t справедливо неравенство:

$$\left|x^{-(s+a)} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}}\right| < e^{-0.4|\eta|^2}. \tag{55}$$

Поэтому интеграл, взятый по этому участку, будет величиной порядка $e^{-0.4|\eta|^2}|\eta|^3$, т. е. низшего, чем величина $t^{-\frac{\sigma}{2}}$.

На втором и последнем из этих участков оказывается, что $\sin 2\varphi < -0.5$, поэтому:

$$\left|x^{-(s+a)} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}}\right| < r^{-(\sigma+a)} e^{-\varphi t - \frac{\pi r^2}{2D}} < e^{-\frac{\pi r^2}{2D}} r^{-\sigma}. \tag{56}$$

Таким образом интеграл и по этому участку окажется меньше, чем величина порядка $t^{-\frac{\sigma}{2}}$.

Сопоставляя сказанное, видим, что (44) можно написать в таком виде:

$$f(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\mu} \frac{\chi(n)}{n^s} + O\left(t^{-\frac{\sigma}{2}}\right). \tag{57}$$

§ **5.** Формулы (22) и (42) § 3 при $s = \frac{1}{2} + ti$, можно переписать так

$$e^{\omega i}\xi(s, \chi) = Re\, e^{\omega i}\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) f(s, \chi). \tag{58}$$

Обозначим через $N(T)$ число корней функции $e^{\omega i}\xi(s,\chi)$ на отрезке прямой $s=\frac{1}{2}+ti$, $0<t<T$. Очевидно неравенство:

$$N(T)>\frac{1}{\pi}\left|\Delta\arg e^{\omega i}\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)f(s,\chi)\right|-1. \tag{59}$$

При этом следует считать, что при переходе через корень, лежащий на самом отрезке, аргумент меняется на число π, умноженное на кратность корня. Пользуясь формулой Стирлинга нетрудно получить равенство:

$$\frac{1}{\pi}\Delta\arg e^{\omega i}\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{T}{2\pi}\log D+O(1). \tag{60}$$

Для изучения изменения аргумента $f(s,\chi)$, воспользуемся очевидным равенством:

$$\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(s,\chi)=\frac{1}{\pi}\Delta_1+\frac{1}{\pi}\Delta_2+\frac{1}{\pi}\Delta_3-2N_1. \tag{61}$$

При этом введены обозначения:

Δ_1 — изменение аргумента $f(s,\chi)$ при движении точки s по горизонтальной прямой между точками $s=\frac{1}{2}+Ti$ и $s=2+Ti$.

Δ_2 — то же для вертикальной прямой от точки $s=2+Ti$ до точки $s=2$.

Δ_3 — то же для горизонтали от $s=2$ до $s=\frac{1}{2}$.

N_1 — число корней функции $f(s,\chi)$ внутри прямоугольника, ограниченного тремя перечисленными прямыми и прямой $s=\frac{1}{2}+ti$, $0<t<T$.

Величины Δ_1, Δ_2, Δ_3 легко оценить. Для Δ_1 прием Баклунда* в теории $\xi(s)$ дает оценку: $\Delta_1=O(\log T)$. Для Δ_2 равенство (57) в соединении со свойствами функции $L(s,\chi)$, равной при $\sigma>1$ ряду $\sum\frac{\chi(n)}{n^s}$ и произведению $\prod\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}$, легко дает формулу: $\Delta_2=O(1)$. Очевидно равенство: $\Delta_3=O(1)$.

После этого (61) можно переписать так:

$$\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(s)=-2N_1+O(\log T). \tag{62}$$

Подставляя (61) и (62) в (55) получаем неравенство, которое будет основой дальнейшего исследования:

$$N(T)>\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{\pi}+\frac{T}{2\pi}\log D-2N_1+O(\log T), \tag{63}$$

* R. Backlund. Sur les zéros de la fonction $\xi(s)$ de Riemann. Comptes rendus de l'Acad. de Sci. de Paris, 1914, p. 1979—1981.

§ 6. Теперь следует получить оценку сверху для величины N_1. Исходным пунктом для этого будет служить следующая формула:

$$2\pi\sum_{\alpha}(\alpha+1)=\int_0^T\log|f(-1+ti)|\,dt+\int_{-1}^{2}\arg f(\sigma+Ti)\,d\sigma-$$
$$-\int_0^T\log|f(2+ti)|\,dt-\int_{-1}^{2}\arg f(\sigma)\,d\sigma. \tag{64}$$

Она легко доказывается с помощью теоремы Коши, примененной к функции $\log f(s)$ и контуру, получающемуся из прямоугольника с вершинами в точках: $(-1,0)$, $(-1,T)$, $(2,T)$, $(2,0)$, если соединить все корни $f(s)$ внутри этого прямоугольника горизонтальными прорезами с левой стороной его. При этом сумма в левой части распространена на все корни α функции $f(s)$, лежащие внутри этого прямоугольника. Величина $\arg f(s)$ в точке $s=2$ выбирается лежащей в интервале $(-\pi,\pi)$, а в остальных точках контура получается продолжением вдоль контура.

Величина четвертого интеграла в (64) ограничена. С помощью (57) можно убедиться в том же и для третьего интеграла. Для второго интеграла прием Баклунда даст величину $O(\log T)$. Поэтому (64) можно переписать в таком виде:

$$2\pi\sum_{\alpha}(\alpha+1)=\int_0^T\log|f(-1+ti)|\,dt+O(\log T). \tag{65}$$

С помощью очевидных неравенств:

$$2\pi\sum_{\alpha}(\alpha+1)>2\pi\sum_{\alpha>\frac{1}{2}}(\alpha+1)>3\pi N_1 \tag{66}$$

из (65) получаем:

$$N_1<\frac{1}{3\pi}\int_0^T\log|f(-1+ti)|\,dt+O(\log T). \tag{67}$$

Для изучения величины интеграла в (67) применим известную формулу:

$$\int_0^T\log|f|\,dt<T\log\frac{1}{T}\int_0^T|f|\,dt. \tag{68}$$

С помощью (57) находим при $s=-1+ti$

$$\int_0^T|f(-1+ti)|\,dt=\int_0^T\left|\sum_1^{\mu}\frac{\chi(n)}{n^s}+O\left(t^{\frac{1}{2}}\right)\right|dt<\int_0^T\left|\sum_1^{\mu}\frac{\chi(n)}{n^s}\right|dt+O\left(T^{\frac{3}{2}}\right). \tag{69}$$

Применение неравенства Шварца дает

$$\left(\int_0^T\left|\sum_1^\mu \frac{\chi(n)}{n^s}\right|dt\right)^2 < T\int_0^T\left|\sum_1^\mu \frac{\chi(n)}{n^s}\right|^2 dt. \tag{70}$$

При этом очевидно имеем:

$$\int_0^T\left|\sum_{n \leq \mu} \frac{\chi(n)}{n^s}\right|^2 dt = \int_0^T \sum_0^\mu |\chi(n)|^2 n^2\, dt + \\ + 2\int_0^T \sum_\nu \sum_n \chi(n)\,\overline{\chi}(n+\nu)\left(\frac{n+\nu}{n}\right)^{ti} n(n+\nu)\, dt. \tag{71}$$

Вычисляя первый из интегралов в правой части находим:

$$\int_0^T \sum |\chi(n)|^2 n^2\, dt < \sum_{2\pi n^2 < DT} n^2 \int_{\frac{2\pi n^2}{D}}^T dt = \frac{2T}{15}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} + O(T^2). \tag{72}$$

При любых вещественных α и β имеем:

$$\left|\int_\alpha^\beta \left(\frac{n+\nu}{n}\right)^{ti} dt\right| = \left|\frac{\left(1+\frac{\nu}{n}\right)^{\beta i} - \left(1+\frac{\nu}{n}\right)^{\alpha i}}{\log\left(1+\frac{\nu}{n}\right)}\right| < \frac{4n}{\nu}. \tag{73}$$

Поэтому для второго члена правой части (71) имеем:

$$2\int_0^T \sum_\nu \sum_n \chi(n)\,\overline{\chi}(n+\nu)\, n(n+\nu)\, dt = O\left(\sum_n \sum_\nu \frac{n^2(n+\nu)}{\nu}\right) = \\ = O\left[\Sigma n^2 (n \log T + \sqrt{T})\right] = O(T^2 \log T). \tag{74}$$

Сопоставляя сказанное, получаем:

$$\int_0^T \left|\sum \frac{\chi(n)}{n^s}\right|^2 dt < \frac{2}{15} T \left(\frac{DT}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} + O(T^2 \log T) \tag{75}$$

После этого из (69) и (70) находим:

$$\int_0^T |f(-1+ti)|\, dt < \sqrt{\frac{2D^{\frac{3}{2}}}{15\,(2\pi)^{\frac{3}{2}}}} \cdot T^{\frac{7}{4}} + O\left(T^{\frac{3}{2}}\right). \tag{76}$$

Подставляя в (68) имеем:

$$\int_0^T \log|f(-1+ti)|\,dt < \frac{3}{4}T\log T + \frac{3}{4}T\log D - \frac{T}{2}\log\frac{15(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{2} + O\left(T^{\frac{3}{4}}\right). \tag{77}$$

Наконец (67) даст оценку для N_1:

$$N_1 < \frac{1}{4\pi}T\log T + \frac{T}{4\pi}\log D - \frac{T}{6\pi}\log\frac{15(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{2} + O\left(T^{\frac{3}{4}}\right). \tag{78}$$

Помножая на 2 и складывая с (63), получаем:

$$N > \frac{T}{\pi}\left[\frac{1}{3}\log\frac{15(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{1}{2}\right] - \frac{T}{2\pi}\log 2\pi + O\left(T^{\frac{3}{4}}\right). \tag{79}$$

Вычисляя постоянную, стоящую в скобках, и группируя слагаемые, можем написать такое неравенство:

$$N > 0.054\,T + O\left(T^{\frac{3}{4}}\right). \tag{80}$$

Если в прямоугольнике, с помощью которого получалось (64), левую вертикаль провести через точку с абсциссой -1.7, а не -1, то, проводя только что изложенное рассуждение, придем к несколько лучшему результату:

$$N(T) > 0.084\ T + O(T^{0,9}). \tag{81}$$

Такой же способ, примененный для функции $\xi(s)$, дает неравенство:

$$N(T) > 0.084\ T + \overline{O}(T^{0,9}). \tag{81}$$

Оно немного точней, чем неравенство К. Зигеля, но несколько менее точно, чем результат, полученный мной в заметке напечатанной недавно* (пользуюсь случаем, чтобы отметить опечатку: в формуле (10) в левой части пропущен множитель $\frac{1}{2} - \sigma_0$, и кроме того знак неравенства направлен в обратную сторону).

Отметим наконец, что в случае справедливости для функции $L(s)$ гипотезы, аналогичной гипотезе Римана для $\zeta(s)$, формула (81) заменится как известно такой:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{T}{2\pi}\log D + O(\log T).$$

Научно-исследовательский институт
математики и механики Ленинградского университета.
Июль 1934 г.

* Р. О. Кузьмин. О корнях функции Римана $\zeta(s)$. Докл. Акад. Наук, 1934, т. II, № 7, стр. 398—400.

R. KUSMIN. ZUR THEORIE DER DIRICHLETSCHEN REIHEN $L(s)$

ZUSAMMENFASSUNG

Die Reihen $L(s)$ sind durch die folgende Gleichung definiert:

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{1}$$

wo $\chi(n)$ den eigentlichen Character modulo D bedeutet. Dabei haben wir $s = \sigma + ti$ und $\sigma > 0$; die Reihe stellt eine reguläre Funktion der veränderlichen s dar.

Die Funktion $L(s)$ kann man bekanntlich durch die Funktion

$$\psi(x, \chi) = 2 \sum_{1}^{\infty} \chi(n)\, n^a e^{\frac{-\pi n^2 x}{D}} \tag{2}$$

ausdrücken, wo $a = \frac{1 - \chi(-1)}{2}$.

Wir haben nämlich die Formel:

$$\xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \psi(x, \chi)\, x^{\frac{s+a}{2} - 1} dx. \tag{3}$$

Mit Hilfe der bekannten Funktionalgleichung:

$$\psi\left(\frac{1}{x}, \chi\right) = \varepsilon(\chi)\, x^{\frac{1}{2} + a} \psi(x, \overline{\chi}),$$

wo $|\varepsilon(\chi)| = 1$; $\chi(n)\overline{\chi}(n) = |\chi(n)|^2$ ist, erhält man aus (3) die folgende Formel:

$$\xi(s, \chi) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\infty} \psi(x, \chi)\, x^{\frac{s+a}{2} - 1} dx + \frac{\varepsilon(\chi)}{2} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\infty} \psi(x, \overline{\chi})\, x^{\frac{1-s+a}{2} - 1} dx. \tag{4}$$

Hier kann man $\alpha = re^{\varphi i}$; $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ nehmen, wenn $s = \sigma + ti$, $-1 < \sigma < 1$, $t > 0$. So erhält man bei $r = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \xi(s, \chi) = {} & e^{(s+a)\frac{\pi i}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^a \int_1^{\infty} e^{\frac{-\pi n^2 x i}{D}} x^{\frac{s+a}{2} - 1} dx + \\ & + \varepsilon(\chi)\, e^{\frac{(s-1-a)\pi i}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n)\, n^a \int_1^{\infty} e^{\frac{\pi n^2 x i}{D}} x^{\frac{1-s+a}{2}} dx \end{aligned} \tag{5}$$

Durch die Integralumformungen und Vertauschung der Integral — und Summenzeichen können wir von (5) zur folgender Formel übergehen:

$$\xi(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\int\limits_{0\swarrow 1} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}} x^{-(s+a)}\varphi(x,\chi)\,dx+$$

$$+\varepsilon(\chi)\left(\frac{\pi}{D}\right)^{\frac{s-1-a}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)\int\limits_{0\nwarrow 1} e^{\frac{-\pi x^2 i}{D}} x^{s-1-a}\varphi(x,\bar\chi)\,dx \qquad (6)$$

Hier ist die Funktion $\varphi(x,\chi)$ durch die folgende Gleichung definiert:

$$\varphi(x,\chi)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{\infty}\chi(n)\,n^a e^{-\frac{\pi n^2 i}{D}}\frac{2x}{x^2-n^2} \qquad (7)$$

Die Formel (6) giebt eine Verallgemeinerung der bekannten Formel aus dem Riemannsche Nachlass. Diese Formel kann man auch in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} e^{\omega i}\xi(s,\chi) &= e^{\omega i}\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)f(s,\chi)+ \\ &+e^{-\omega i}\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{1-s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)f(1-s,\bar\chi). \end{aligned} \qquad (8)$$

Dabei ist ω reell und zum Kurzen ist genommen:

$$f(s,x)=\int\limits_{0\swarrow 1} e^{\frac{\pi x^2 i}{D}} x^{-(s+a)}\varphi(x,\chi)\,dx. \qquad (9)$$

Durch die Anwendung der Sattelpunktmethode aus (9) erhält man die Abschätzung:

$$f(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\mu}\frac{\chi(n)}{n^s}+O\left(t^{-\frac{\sigma}{2}}\right);\ |\sigma|<\sigma_0,\ \mu=\left[\sqrt{\frac{Dt}{2\pi}}\right]. \qquad (10)$$

Wenn $s=\frac{1}{2}+ti$, so (8) kann man auch so schreiben:

$$e^{\omega i}\xi(s,\chi)=Re\, e^{\omega i}\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)f(s,\chi), \qquad (11)$$

wo $Re f$ wie gewöhnlich das Realtheil von f bezeichnet. Aus (11) folgt unmittelbar die wichtige Ungleichung:

$$N(T)>\frac{1}{\pi}\left|\Delta\arg e^{\omega i}\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)f(s,\chi)\right|-1. \qquad (12)$$

Hier muss die Veränderliche s die Gerade: $s=\frac{1}{2}+ti$, $o<t<T$ laufen und Änderung des Arguments von der Funktion beim Passieren durch etwaigen Nullstelle gleich der mit π multiplizierten Vielfachheit der Nullstelle festgesetzt ist.

Durch $N(T)$ haben wir im (12) die Anzahl der Nullstellen der Funktion $\xi(s, \chi)$ bezeichnet, welche auf die Gerade: $s = \frac{1}{2} + ti$, $0 < t < T$, liegen.

Eine einfache Rechnung zeigt, dass:

$$\frac{1}{\pi} \Delta \arg e^{\omega i} \left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{T}{2\pi} \log D + O(1). \quad (13)$$

Mit Hilfe der Gleichung (10) überzeugen wir uns in der Richtgkeit der folgender Formel:

$$\frac{1}{\pi} \Delta \arg f(s, x) = -2N_1(T) + O(\log T), \quad (14)$$

wo $N_1(T)$ die Anzahl der Nullstellen der Funktion $f(s, \chi)$ ist, welche von der Form $s = \sigma + ti$, $\frac{1}{2} < \sigma < 2$; $0 < t < T$ sind. Also nach (12), (13) und (14) finden wir:

$$N(T) > \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{T}{2\pi} \log D - 2N_1(T) + O(\log T). \quad (15)$$

Um die Abschätzung der Grösse $N_1(T)$ zu erhalten, gehen wir von der folgender Formel aus:

$$2\pi \sum (\alpha + 1) = \int_0^T \log |f(-1 + ti)| \, dt + \int_{-1}^2 \arg f(\sigma + Ti) \, d\sigma -$$
$$- \int_0^T \log |f(2 + ti)| \, dt - \int_{-1}^2 \arg f(\sigma) \, d\sigma. \quad (16)$$

Die Summicrung im linken Teil von (16) erstreckt sich auf alle Wurzeln $s = \alpha + \beta i$ der Funktion $f(s, x)$, welche der Bedingungen: $-1 < \alpha < 2$; $0 < \beta < T$ unterworfen sind. Es ist ohne weiteres klar, dass:

$$2\pi N_1(T) \leqq 2\pi \sum_{\alpha > \frac{1}{2}} (\alpha + 1) \leqq 2\pi \sum (\alpha + 1). \quad (17)$$

Die drei letzen Integrale im rechten Teil von (16) geben in ihren Gesammtheit nur die Grösse der Ordnung $\log T$. Also erhalten wir aus (16) und (17) die Ungleichung:

$$N_1(T) < \frac{1}{2\pi} \int_0^T \log |f(-1 + ti)| \, dt + O(\log T). \quad (18)$$

Nach der bekannten Ungleichung haben wir:

$$\int_0^T \log |f| \, dt \leqq T \log \frac{1}{T} \int_0^T |f| \, dt. \quad (19)$$

Aus (10) folgt die Formel:

$$\int_0^T |f(-1 + ti)| \, dt < \int_0^T \left| \sum_1^{\mu} \frac{\chi(n)}{n^s} \right| dt + O(T^{\frac{3}{2}}). \quad (20)$$

Laut der Schwarzschen Ungleichung finden wir:

$$\left[\int_0^T \left|\sum_1^{\mu} \frac{\chi(n)}{n^s}\right| dt\right]^2 < T \int_0^T \left|\sum_1^{\mu} \frac{\chi(n)}{n^s}\right|^2 dt. \tag{21}$$

Hier haben wir $s = -1 + ti$; $\mu = \left[\sqrt{\frac{Dt}{2\pi}}\right]$ und folglich ist:

$$\int \left|\sum_1^{\mu} \frac{\chi(n)}{n^s}\right|^2 dt = \int_0^T \sum_1^{\mu} |\chi(n)|^2 n^2\, dt + 2\int_0^T \sum_{\nu, n} \chi(n)\,\overline{\chi}(n+\nu)\left(\frac{n+\nu}{n}\right)^{ti} n(n+\nu)\, dt. \tag{22}$$

Eine leichte Rechnung zeigt die Richtigkeit der Abschätzungen:

$$2\int_0^T \sum_{\nu, n} \overline{\chi}(n+\nu)\,\chi(n)\, n\,(n+\nu)\left(\frac{n+\nu}{\nu}\right)^{ti} dt = O\left(\sum_{\nu, n} \frac{n^2(n+\nu)}{\nu}\right) = O(T^2 \log T) \tag{23}$$

$$\int_0^T \sum_{n=1}^{\mu} |\chi(n)|^2 n^2\, dt < \sum_{2\pi n^2 < DT} n^2 \int_{\frac{2\pi n^2}{D}}^T dt = \frac{2T}{15}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} + O(T^2). \tag{24}$$

Aus der Formeln von (17) bis (24) erhalten wir die Ungleichung:

$$N_1(T) < \frac{1}{4\pi} T \log T + \frac{T}{4\pi} \log D - \frac{T}{6\pi} \log \frac{15}{2} (2\pi)^{\frac{3}{2}} + O(T^{\frac{3}{4}}). \tag{25}$$

Daraus und aus (15) folgt unmittelbar:

$$N(T) > 0.054\, T + O(T^{\frac{3}{4}}). \tag{26}$$

Die ganze Untersuchung von der Formel (16) bis zum Ende kann man durchführen, wenn man von folgender Formel ausgeht:

$$2\pi \sum (\alpha + 1.7) = \int_0^T \log |f(-1.7 + ti)|\, dt + \int_{-1,7}^{2} \arg f(\sigma + Ti)\, d\sigma$$
$$- \int_0^T \log |f(2 + ti)|\, dt - \int_{-1.7}^{2} \arg f(\sigma)\, d\sigma. \tag{27}$$

Die Summierung im linke Teil ist jetzt erstreckt auf die Wurzeln $s = \alpha + \beta i$ der Funktion $f(s, \chi)$, welche den Bedingungen: $-1.7 < \alpha < 2$; $0 < \beta < T$ unterworfen sind. Die entsprechende Rechnungen liefern als Endresultat folgende Ungleichung, etwas bessere als früher:

$$N(T) > 0.084\, T + O(T^{0,9}). \tag{28}$$

Leningrad, Juli 1934.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

SUR LE PROBLÈME DE LA RÉSOLUBILITÉ („ENSTCHEIDUNGS-PROBLEM")

Par N. KIREJEVSKIJ

(*Présenté par* S. Bernstein, *membre de l'Académie*)

Certains ouvrages se rapportant au Entscheidungsproblem le résolvent dans les cas particuliers; tels sont les ouvrages d'Ackermann (Mathem. Annal., Bd. 100), de Behmann (Mathem. Annal., Bd. 86), de Bernays et Schönfinkel (Mathem. Annal., Bd. 99). Les autres réduisent la résolution des cas plus généraux aux cas plus particuliers, quoiqu'ils ne soient pas encore résolus; tels sont les ouvrages de Löwenheim (Mathem. Annal., Bd. 76), de Herbrand (Comptes Rendus, 1929). L'article présent est un ouvrage du second type; il se rapporte au schème de la logique mathématique de Russel sans partager les fonctions du même type en degrés (Stufen) selon la manière des variables liées d'entrer dans la définition des fonctions, c'est-à-dire tenant pour possible de rapporter à toutes les fonctions du même type les signes des opérateurs des variables générales et des variables restreintes, et par conséquent sans «Axiom der Reduzierbarkeit». Il est montré dans cet article qu'Entscheidungsproblem par rapport à n'importe quelles propositions de ce schème serait résolu, s'il pouvait être résolu dans le cas, quand il n'y a que deux signes des fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$, chacune du type $t(00)$ (les signes des types sont empruntés du livre de Carnap, Abriss der Logistik), c'est-à-dire chacune dépendante de deux arguments qui se rapportent aux éléments. Ce que la résolution d'Entscheidungsproblem dans ce cas, relativement très particulier, suffirait pour le résoudre dans le cas le plus général, suit de la possibilité de paraphraser les corrélations entre les éléments et les fonctions de types différents se rapportant à un certain champ B en corrélations entre les éléments et seulement deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ dépendant des éléments qui appartiennent à un certain autre champ A. Les éléments du champ A d'après les conventions ci-dessous joueront le rôle des éléments d'un certain autre champ B et des fonctions de types différents se rapportant au champ B et les valeurs des fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ joueront le

rôle des valeurs des fonctions se rapportant au champ B. Afin qu'il n'y ait pas de confusion, tous les termes qui se rapporteront au champ B seront mis entre les guillemets.

Convenons que:

1. L'élément z du champ A est «l'élément z du type $t0$» si:

$f(z, w_0)$ est vrai;
w_0 est un élément du champ A;
$f(x, x)$ n'est vrai pour aucun x du champ A.

«Les éléments du type $t0$» forment le champ correspondant au champ B.

2. L'élément z du champ A est «la fonction z du type $t(0)$» si:

$f(z, w_{(0)})$ est vrai;
$w_{(0)}$ est un élément du champ A qui ne satisfait pas aux conditions 1;
il n'existe pas d'élément x du champ A pour lequel $f(x, w_{(0)})$ fût vrai et qui avec cela satisfît aux conditions 1.

3. La valeur de la fonction $f(x, y)$ est «la valeur de la fonction y du type $t(0)$, quand son argument a la signification x du type $t0$» si:

x satisfait aux conditions 1;
y satisfait aux conditions 2.

4. «Deux éléments x et y chacun du type $t0$ sont identiques» si:

«les valeurs de n'importe quelle fonction du type $t(0)$, quand son argument prend la signification x ou la signification y, sont les mêmes».

5. L'élément z du champ A est «la fonction du type $t((0))$» si:

$f(z, w_{((0))})$ est vrai;
$w_{((0))}$ est un élément du champ A qui ne satisfait ni aux conditions 1 ni aux conditions 2;
il n'existe pas d'élément x du champ A pour lequel $f(x, w_{((0))})$ fût vrai et qui avec cela satisfît aux conditions 1 ou aux conditions 2.

6. La valeur de la fonction $f(x, y)$ est «la valeur de la fonction y du type $t((0))$, quand son argument prend la signification x du type $t(0)$» si:

x satisfait aux conditions 2;
y satisfait aux conditions 5.

7. «Deux fonctions x et y chacune du type $t(0)$ sont identiques» si:

«les valeurs de n'importe quelle fonction du type $t((0))$, quand son argument prend la signification x ou la signification y, sont les mêmes».

8. L'élément u du champ A est «la fonction du type $t(00)$» si:

$f(u, w_{(00)})$ est vrai;

$w_{(00)}$ est un élément du champ A qui ne satisfait ni aux conditions 1, ni aux 2, ni aux 5;

il n'existe pas d'élément x du champ A pour lequel $f(x, w_{(00)})$ fût vrai et qui avec cela satisfît aux conditions 1, ou aux 2, ou aux 5;

les éléments k du champ A pour lesquels $f(k, u)$ est vrai sont tels que:

ils ne satisfont ni aux conditions 1, ni aux 2, ni aux 5;

$f(k, w_{(00)})$ n'est pas vrai;

pour chaque k il existe un et seulement un x, qui satisfait aux conditions 1 et tel que $f(x, k)$ est vrai;

pour chaque k il existe un et seulement un y qui satisfait aux conditions 2 et tel que $f(y, k)$ est vrai;

pour chaque z qui satisfait aux conditions 1 il existe un tel l que $f(z, l)$ et $f(l, u)$ sont vrai;

pour aucun s qui satisfait aux conditions 1 il n'existe de tels t, h, g et r que g et r satisfissent aux conditions 2, qu'ils ne satisfissent pas aux conditions 7 et que $f(s, t)$, $f(s, h)$, $f(t, u)$, $f(h, u)$, $f(g, t)$, $f(r, h)$ fussent vrais;

Si on développait plus en détail la partie des conditions 8, déterminant «la fonction du type $t(00)$», où l'on parle des éléments désignés par les lettres x et y, on devrait se servir des conditions 4 et 7.

9. La valeur de la fonction $f(y, z)$ est «la valeur de la fonction u du type $t(00)$, quand ses arguments prennent les significations x et y les deux du type $t\,0$» si:

x satisfait aux conditions 1;

y satisfait aux conditions 1;

z satisfait aux conditions 2;

u satisfait aux conditions 8;

z est tel, qu'il y a l'élément k du champ A pour lequel $f(k, u)$, $f(x, k)$, $f(z, k)$ sont vrais;

Il est bien évident que de la manière analogue on pourrait introduire les conditions d'après lesquelles certains éléments du champ A seraient «les fonctions du type $t(0(0))$, ou du type $t((0)0)$, ou du type $t((0)(0))$, ou en général les fonctions de deux arguments». On traitera de la manière analogue les cas des fonctions de trois et de plus de trois arguments. Examinons, par exemple, le cas d'une fonction du type $t((0)00)$; mais pour cela il faudrait d'abord introduire des conditions d'après lesquelles los éléments du champ A soient «les fonctions du type $t((00))$».

Convenons que:

10. L'élément z du champ A est «la fonction du type $t((00))$» si:

$f(z, w_{((00))})$ est vrai;

$w_{((00))})$ est un élément du champ A qui ne satisfait ni aux conditions 1, ni aux 2, ni aux 5, ni aux 8 et $f(w_{((00))}, h)$ n'est pas vrai si h satisfait aux conditions 8;

il n'existe pas un tel élément x du champ A pour lequel $f(x, w_{((00))})$ fût vrai et qui avec cela satisfît aux conditions 1, ou aux 2, ou aux 5, ou aux 8, ou pour lequel $f(x, k)$ fût vrai si k satisfait aux conditions 8.

11. La valeur de la fonction $f(x, y)$ est «la valeur de la fonction y du type $t((00))$, quand son argument prend la signification x du type $t(00)$» si:

x satisfait aux conditions 8;

y satisfait aux conditions 10.

12. «Deux fonctions x et y chacune du type $t(00)$ sont identiques» si:

«les valeurs de n'importe quelle fonction du type $t((00))$, quand son argument prend la signification x ou la signification y sont les mêmes».

13. L'élément u du champ A est «la fonction du type $t((0)00)$» si:

$f(u, w_{((0)00)})$ est vrai;

$w_{((0)00)}$ est un élément du champ A qui ne satisfait ni aux conditions 1, ni aux 2, ni aux 5, in aux 8, ni aux 10, et $f(w_{((0)00)}, h)$ n'est pas vrai si h satisfait aux conditions 8;

il n'existe pas un tel élément p du champ A pour lequel $f(p, w_{((0)00)})$ fût vrai et qui avec cela satisfît aux conditions 1, ou aux 2, ou aux 5, ou aux 8, ou aux 10 ou pour lequel $f(p, m)$ fût vrai si m satisfait aux conditions 8;

les éléments k du champ A pour lesquels $f(k, u)$ est vrai sont tels qu'ils ne satisfont pas ni aux conditions 1, ni aux 2, ni aux 5, ni aux 8, ni aux 10: $f(k, w_{((0)00)})$ n'est pas vrai;

$f(k, n)$ n'est pas vrai si n satisfait aux conditions 8;

pour chaque k il existe un et seulement un x qui satisfait aux conditions 2 et tel que $f(x, k)$ soit vrai;

pour chaque k il existe un et seulement un y qui satisfait aux conditions 8 et tel que $f(y, k)$ soit vrai;

pour chaque z qui satisfait aux conditions 2 il existe un tel l que $f(z, l)$ et $f(l, u)$ soient vrais;

pour aucun s satisfaisant aux conditions 2 il n'existe de tels t, h, g et r que g et r satisfissent aux conditions 8, qu'ils ne satisfissent pas aux con-

ditions 12 et que $f(s, t)$, $f(s, h)$, $f(t, u)$, $f(h, u)$, $f(g, t)$, $f(r, h)$ soient vrais.

Si on développait plus en détail la partie des conditions 13 déterminant «la fonction du type $t((0)00)$» où l'on parle des éléments désignés par les lettres x et y, on devrait se servir des conditions 7 et 12

14. La valeur de la fonction $f(z, r)$ est «la valeur de la fonction u du type $t((0)00)$, quand ses arguments prennent les significations x du type $t(0)$, y et z du type $t0$» si:

x satisfait aux conditions 2;
y satisfait aux conditions 1;
z satisfait aux conditions 1;
r satisfait aux conditions 2;
u satisfait aux conditions 13;
il existe de tels éléments k, h et v du champ A que $f(k, u)$, $f(x, k)$, $f(v, k)$, $f(h, v)$, $f(y, h)$, $f(r, h)$ sont vrais;
v satisfait aux conditions 8.

On pourrait introduire de la manière analogue les conditions d'après lesquelles certains éléments du champ A soient «les fonctions de trois arguments de n'importe quel type et puis aussi de n'importe quel nombre d'arguments de n'importe quel type».

Il est bien évident que d'après ces conditions la hiérarchie des types est observée.

La fonction $f(x, y)$, dont les arguments sont les éléments du champ A, au moyen de laquelle d'après les conditions ci-dessus se forme le champ «des éléments» B et «les fonctions de types differents» se rapportant au champ B — peut être telle qu'il n'y aurait point d'éléments du champ A qui satisfissent aux conditions posées ou même, s'il y avait de tels éléments, ils ne présenteraient pas toutes «les fonctions» possibles de tels types qu'on voudrait examiner. C'est pourquoi il faut que la fonction $f(x, y)$ satisfasse à la condition:

15. Il n'existe pas de telle fonction $\varphi(x, y)$, dont les arguments soient les éléments du champ A, qui, formant les mêmes «élément» du champ B que la fonction $f(x, y)$, les mêmes «fonctions et des mêmes types» que la fonction $f(x, y)$, formât, outre cela, encore de telles «fonctions p» de types qu'on a à examiner que pour n'importe quelle «fonction g», formée par la fonction $f(x, y)$ du même type que p, il y ait toujours un argument ou un système d'arguments que ou p soit vrai et que g ne le soit pas ou que p ne soit pas vrai et que g le soit.

Il est essentiel de remarquer que toutes les conditions proposées n'exigent point de réalisation d'Extensionalitätsthese puisque deux «fonction» du même type prenant pour tous «les systèmes des significations de leurs arguments» les mêmes «valeurs» — étant eux-mêmes «les significations des arguments» de quelque «fonction» d'un type plus compliqué, peuvent déterminer «les valeurs» différentes de cette «fonction».

Pour exemple paraphrasons conformément aux conditions ci-dessus une proposition quelconque, contenant les fonctions de deux arguments, parce que le cas d'un argument serait trop simple.

Admettons que nous voulons résoudre la question, si c'est vrai que chaque fonction F du type $t((00))$ présente la propriété de transitivité des fonctions ψ du type $t(00)$, c'est-à-dire si c'est vrai que:

pour tous les F et pour tous les ψ $F(\psi)$ est vrai dans le cas et seulement dans le cas où pour toutes les significations x, y, z, de ce que $\psi(x, y)$ et $\psi(y, z)$ sont vrais il suit que $\psi(x, z)$ est vrai.

Paraphrasée, cette proporsition s'énoncera ainsi:

pour tous les f satisfaisant aux conditions 15 et en ce cas les conditions 1 ... 12 y seront utilisées;

pour tous les a satisfaisant aux conditions 10; pour tous les u satisfaisant aux conditions 8; pour tous les x, y, z satisfaisant aux conditions 1; pour tous les r, s satisfaisant aux conditions 2; pour tous les h et k tels que $f(h, u)$, $f(k, u)$, $f(x, h)$, $f(y, k)$, $f(r, h)$, $f(s, k)$ sont vrais —
$f(u, a)$ est vrai dans le cas et seulement dans le cas où de ce que $f(y, r)$ et $f(z, s)$ sont vrais, il suit que $f(z, r)$ est vrai.

La proposition U, qui contient n'importe quel nombre de signes des fonctions de n'importe quels types, étant paraphrasée, formera la proposition U, qui ne contient que deux signes des fonction, chacune du type $t(00)$, et qui sera composée de trois parties essentieffes:

Premièrement il faut indiquer les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction $f(x, y)$

Deuxièmement il faut indiquer les conditions auxquelles doivent satisfaire les éléments du champ A, nécessaires pour paraphraser la proposition U.

Troisièmement il faut indiquer les corrélations auxquelles seront subordonnés les éléments du champ A et qui correspondent, en vertu des conditions ci-dessus, aux corrélations exprimées par la proposition U.

Chaque proposition U peut être paraphrasée en quelque proposition V, mais, certainement, pas chaque proposition contenant deux signes des fonction du type $t(00)$, peut être paraphrasée en quelque proposition U.

Chaque fonction $f(x, y)$, se rapportant au champ A et qui satisfait aux conditions 15, forme un système «d'éléments» et «des fonctions de types differents», tout analogiquement au système d'éléments et des fonctions de types differents se rapportant au champ B. Si la proposition U est une identité logique, cela signifie qu'elle est vraie par rapport à n'importe quel champ B, — mais la proposition V, qui correspond à la proposition U, peut être une identité logique dans le cas et seulement dans le cas où elle est vraie par rapport à n'importe quel champ A, et comme les conditions 15 n'exigent pas que le champ «des éléments» qui satisfont aux conditions 1 soit d'une puissance déterminée, il suit que la fonction $f(x, y)$ peut former tous les systèmes possibles «d'éléments et des fonctions de types differents».

Ainsi est montrée die grundsätzliche Möglichkeit (Hilbert-Ackerman. Grundzüge der Theoretischen Logik, p. 77) de reduction de la question concernant la vérité des propositions qui contiennent n'importe quel nombre de signes des fonctions de n'importe quels types à la question de la vérité des propositions ne contenant que deux signes des fonctions du type $t(00)$.

Н. Н. КИРЕЕВСКИЙ. О ЗАДАЧЕ РАЗРЕШИМОСТИ („ENTSCHEIDUNGSPROBLEM“)

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье автор имеет в виду схему Математической Логики Ресселя, но без разделения функций в пределах одного типа на ступени, т. е. считая возможным относить знаки общих и частных операторов ко всем функциям одного типа и следовательно без аксиомы приводимости. Автор показывает возможность сведения вопроса о правильности предложений, содержащих любое число знаков функций любых типов, к вопросу о правильности предложений, содержащих лишь два знака функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ типа $t(00)$. Возможность такого сведения Entscheidungsproblem в самой общей постановке вопроса к сравнительно очень частному случаю следует из того, что соотношения между элементами некоторого поля B и функциями разных типов, относящимися к полю B, можно перефразировать как соотношения между элементами некоторого другого поля A и между двумя функциями $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$, относящимися к полю A. Элементы поля A, согласно некоторым условиям, играют роль элементов поля B и функций разных типов, относящихся к полю B, а значения функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ играют роль значений функций разных типов относящихся к полю B.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

К ИССЛЕДОВАНИЮ СТРАТОСФЕРЫ ПУТЕМ ФОТОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СУМЕРОК

В. Г. ФЕСЕНКОВА

1. Всем хорошо известное явление сумерок зависит от рассеяния света в высоких и почти идеально чистых слоях атмосферы, еще освещенных Солнцем после его захода под горизонт наблюдателя. Это явление усложняется рассеянием света нижними более плотными и запыленными слоями. Если бы влияние последних слоев отсутствовало, или как говорят, если бы можно было ограничиться рассеянием лишь первого порядка, сумеречное освещение неба непрерывно убывало бы от запада к востоку в вертикале Солнца. Восточная часть неба, над которой уже поднялась тень Земли, казалась бы абсолютно черной. В действительности, как известно, яркость сумеречного неба наибольшая на западе, достигает минимума в точке, расположенной около зенита в направлении к востоку, а затем снова возрастает до вторичного максимума на востоке. В этом именно и сказывается влияние вторичного рассеяния, особенно значительного в нижних слоях воздуха.

Отсюда следует, что наблюдая яркость неба в различных точках солнечного вертикала, а еще лучше на всем небесном своде с момента захода Солнца и вплоть до прекращения сумерок, можно рассчитывать выделить этот эффект рассеяния высших порядков и свести всю проблему к рассмотрению рассеяния лишь первого порядка. В этом упрощенном виде задача ставится следующим образом.

Солнечные лучи, проникая из-под горизонта наблюдателя и испытывая на своем пути поглощение, преломление и рассеяние, освещают некоторый объем воздуха, находящийся в телесном углу с растворением ω на расстоянии r от наблюдателя. Известная доля света, пропорциональная плотности воздуха в данном месте, рассеивается к наблюдателю. Сумма количеств света, рассеянного всеми подобными объемами, еще освещенными Солнцем, именно от некоторого предельного расстояния r_1, соответствующего высоте h_1 над уровнем моря и до ∞, определяет яркость на данной площади небесного свода. Эту площадь

удобнее выбрать в вертикале Солнца. Искомая плотность воздуха найдется, как решение интегрального уравнения вида

$$J \infty \int_{r_1}^{\infty} j f(\rho) dr$$

совершенно аналогичного уравнению Шварцшильца, применяемого в звездной статистике для определения пространственной плотности звезд по их видимому распределению. Последнее уравнение имеет вид

$$A_m^{m+1} \infty \int D(r) L(M) r dr,$$

где $L(M)$ есть так называемая luminosity function, представляющая распределение звезд по их абсолютным величинам в данной области пространства, и $D(r)$ — density function — искомое количество звезд в единице объема. В нашем случае $f(\rho)$ вполне аналогично $D(r)$ и j — $L(M)$. Как известно, если A_m^{m+1}, наблюдаемое количество звезд в пределах между m и $m+1$ звездной величины, может быть представлено в виде выражения

$$A_m^{m+1} = e^{a+bm+cm^2}$$

и $L(M)$ — аналогичным образом, но с другими значениями постоянных, то интегральное уравнение имеет решение, имеющее подобный же аналитический вид. Однако и помимо этой аналогии очевидно, что поставленная задача имеет определенное решение. Функция j, характеризующая степень освещения Солнцем атмосферных слоев, может быть представлена в виде кривой, которая, начинаясь почти от нуля, возрастает и на протяжении примерно 10—15 км асимптотически приближается к своему предельному значению, соответствующему полному отсутствию поглощения. При увеличении зенитного расстояния Солнца ζ эти кривые, мало изменяя свою форму, смещаются в сторону увеличения высоты. С другой стороны, плотность ρ непрерывно убывает с высотой. Произведение ординат обеих кривых, входящее под знак интеграла, представляется кривой, имеющей максимум, соответствующий определенной высоте. В результате этого выделяется лишь определенный слой атмосферы не весьма большой толщи, который производит явление сумерок. По мере погружения Солнца под горизонт этот слой непрерывно поднимается кверху. Таким образом задача строения атмосферы по явлению сумерок может быть однозначно решена, но для каждой высоты получаются некоторые усредненные значения плотностей. Мелкие особенности строения атмосферы при этом, конечно, пропадают.

В целях исследования строения атмосферы мною производились в 1929 и 1930 гг. наблюдения сумерок при помощи трубочных фотометров, регистри-

рующих яркость одновременно в двух точках неба в вертикале Солнца, симметрично расположенных по отношению к зениту ($z = 67°$). Наблюдения начинались с момента захода Солнца. Благодаря примененному желтому фильтру в соединении с обыкновенными пластинками Agfa Normal выделялась лишь узкая область спектра, слабо действующая на пластинку, именно от 525 $m\mu$ до 480 $m\mu$ с резким максимумом около 515 $m\mu$. Для каллибрации пластинок служил нормальный клин Цейсса с хорошо исследованцой постоянной. Всего получено 20 пластинок, годных для вывода сумерочных кривых, которые строились по аргументу зенитного расстояния Солнца и логарифма яркости неба на указанных зенитных расстояниях в вертикале Солнца.

2. Первоначальная обработка сумерочных кривых была предпринята мною путем кропотливых вычислений интенсивности светового потока в каждой точке атмосферы с учетом искривления траекторий и поглощения на каждом их отрезке. Подобный способ очень громоздок и может быть применен для обработки лишь одной усредненной сумерочной кривой. Можно, однако, получить аналогичные результаты более простым образом. На основании упомянутых вычислений можно заключить, что доля освещенности для каждого объема атмосферы внутри конуса луча зрения наблюдателя довольно хорошо представляется эмпирическим выражением

$$e^{-(\alpha+\beta\sqrt{h_0}+\gamma h_0)},$$

где h_0 — наименьшее возможное расстояние от земной поверхности светового луча, проходящего через данный объем, связанное простым образом с высотой этого объема над уровнем моря. Например, в случае наблюдения яркости неба в зените, имеем (рефракцией пренебрегаем)

$$h_0 = (a + h)\sin\zeta - a,$$

где a — радиус Земли, ζ — зенитное расстояние Солнца.

Постоянные в формуле имеют значения:

$$\alpha = 9.8485\chi; \quad \beta = -3.5269\chi; \quad \gamma = 0.3148\chi, \quad \text{где} \quad \chi = \frac{0.4}{\log e}.$$

С другой стороны, плотность воздуха есть убывающая функция высоты, вероятно мало отличающаяся от экспотенциальной формы. Положим, поэтому, что

$$\rho \infty e^{-kh},$$

где k — есть величина, мало меняющаяся с высотой. Яркость сумерок может быть, поэтому, представлена в виде

$$(1) \qquad J \infty (1 + \cos^2\zeta) \int_{h_1}^{\infty} e^{-\alpha-\beta\sqrt{h_0}-\gamma h_0-kh}\, dh$$

Пределы интеграции означены от h_1 до ∞, причем в формуле (1) фактически пределы интеграции относятся к толще слоя, эффективного в производстве сумерок. Для этой толщи мы можем взять среднее значение k, принимая его в данных пределах постоянным. Указанное выше уравнение может быть легко проинтегрировано. Заметим, что наблюдения по необходимости носят лишь относительный характер. Поэтому мы получаем из них не самую яркость сумерок, а лишь ее градиент, под которым мы подразумеваем

$$\frac{d(\log J)}{d\zeta}.$$

Для этой величины теория дает в случае зенитных наблюдений, если ограничиться лишь первым членом, имеющим доминирующее значение, благодаря наличию a — радиуса Земли, как множителя:

$$\frac{d(\log J)}{d\zeta} = ka \operatorname{ctg}\zeta \operatorname{cosec}\zeta \log e \frac{\pi}{180}, \tag{2}$$

откуда для каждого J находим соответствующее k. Эта величина k — градиент плотности атмосферы с высотой — относится к определенной высоте над уровнем моря, которая находится как среднее весовое для данного эффективного слоя, именно:

$$\bar{h} = \frac{\int\limits_{h_1}^{\infty} e^{-\alpha-\beta\sqrt{h_0}-\gamma h_0-kh}\, h\, dh}{\int\limits_{h_1}^{\infty} e^{-\alpha-\beta\sqrt{h_0}-\gamma h_0-kh}\, dh}$$

или

$$\bar{h} = a(\operatorname{cosec}\zeta - 1) + \frac{\operatorname{cosec}\zeta}{\gamma + k\operatorname{cosec}\zeta}\left[1.5 + \frac{\beta^2}{4(\gamma + k\operatorname{cosec}\zeta)}\right]. \tag{3}$$

Для высоты слоя, максимальным образом рассеивающего свет при данной толще, имеем:

$$\bar{\bar{h}} = a(\operatorname{cosec}\zeta - 1) + \frac{\beta^2 \operatorname{cosec}^2\zeta}{4(\gamma + k\operatorname{cosec}\zeta)}.$$

Если в эти выражения вставить указанные выше значения параметров β и γ, то находим

$$\bar{h} = a(\operatorname{cosec}\zeta - 1) + 21.3 \operatorname{cosec}\zeta;$$
$$\bar{\bar{h}} = a(\operatorname{cosec}\zeta - 1) + 17.8 \operatorname{cosec}^3\zeta.$$

Отсюда видно, что наименьшая высота, к которой еще приложим фотометрический метод исследования атмосферы по сумеречным явлениям, составляет около 20 км. Поскольку результаты носят лишь относительный характер, на этой высоте должно быть известно исходное значение плотности.

Выше мы рассматривали случай наблюдения сумерок в зените. В более сложном случае значительного зенитного расстояния наблюдаемого участка неба дифференциал dr под знаком интеграла 1) входит в виде ряда

$$dr = dh \sec z \left(1 - \frac{h}{a} \operatorname{tg}^2 z + \frac{3}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^2 z \sec^2 z + \ldots\right),$$

в котором следует взять по крайней мере два первых члена. Вследствие этого выражение для яркости сумерок представляется по крайней мере при помощи двух интегралов (при условии, что $z \leqslant 70°$) и притом того же типа как и раньше, так как связь между h_0 и h сохраняет прежнюю линейную форму, именно

$$h_0 = K + Lh + (Mh^2),$$

где

$$K = a(\sin\zeta - 1); \quad L = \sin\zeta - \cos\zeta \operatorname{tg} z; \quad M = -\frac{\operatorname{ctg}\zeta \operatorname{tg} z}{a}.$$

Последний член, поставленный в скобки, очень мал и им можно пренебречь.

В результате получаем в этом случае

$$\frac{180}{\pi \log e} \frac{d(\log J)}{d\zeta} = A + B + C + D + E, \tag{4}$$

где

$$A = \frac{ka \operatorname{cosec}\zeta \operatorname{ctg}\zeta}{1 - \operatorname{ctg}\zeta \operatorname{tg} z}; \qquad B = \frac{ka(\operatorname{cosec}\zeta - 1) \operatorname{tg} z \operatorname{cosec}^2\zeta}{(1 - \operatorname{ctg}\zeta \operatorname{tg} z)^2}$$

$$C = \frac{\beta^2}{4} \frac{k \operatorname{cosec}\zeta (\operatorname{ctg}\zeta + \operatorname{tg} z)}{[\gamma(1 - \operatorname{ctg}\zeta \operatorname{tg} z) + k \operatorname{cosec}\zeta]^2}$$

$$D = \frac{3}{2} \frac{k \operatorname{cosec}\zeta (\operatorname{ctg}\zeta + \operatorname{tg} z)}{\gamma(1 - \operatorname{ctg}\zeta \operatorname{tg} z) + k \operatorname{cosec}\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{ctg}\zeta \operatorname{tg} z}$$

$$E = \frac{\operatorname{cosec}^2\zeta \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{ctg}\zeta \operatorname{tg} z} + \operatorname{ctg}\zeta.$$

Согласно этой формуле для каждого данного ζ и градиента яркости сумерок можно найти k — градиент плотности воздуха, соответствующий высоте эффективного слоя. Нагляднее и проще находить k графически.

Вычислим указанную формулу для разных значений k и r, полагая $z = 67°$, как это имело место в моих наблюдениях, и положим $\zeta = 90°$; $92°$; $94°$; $96°$; $98°$ и $k = 0.16$; 0.14; 0.12; 0.11; 0.10; 0.09 и 0.08. Так, например, для $k = 0.12$ имеем следующие значения различных членов формулы (4):

$k = 0.12$

ζ	A	B	C	D	E	$\frac{d(\log J)}{d\zeta}$
90°	0	−8.23	4.31	1.00	−2.29	−0.0395
92°	−24.71	−6.17	3.80	0.87	−2.08	−0.2144
94°	−46.20	−3.02	3.52	0.71	−1.91	−0.3555
96°	−65.15	+0.91	3.13	0.62	−1.76	−0.4719
98°	−82.11	+5.20	2.80	0.55	−1.62	−0.5699

Мы видим, что в данном случае (за исключением $\zeta = 90^\circ$) сумеречный градиент определяется преимущественно первым членом. Изображая теперь сумеречные градиенты графически, получим семейство кривых, соответствующих различным градиентам, постоянным во всей толще атмосферы. Достаточно теперь построить на той же графике действительно наблюдаемые сумеречные градиенты равным образом в функции зенитного расстояния Солнца, чтобы немедленно получить путем интерполяции величины k для каждого ζ. Соответствующие высоты эффективного слоя находятся аналогично предыдущему из следующей формулы:

$$\bar{h} = \frac{a(\operatorname{cosec}\zeta - 1)}{1 - \operatorname{ctg}\zeta \operatorname{tg} z} + \tag{5}$$

$$+ \frac{\operatorname{cosec}\zeta}{1 - \operatorname{ctg}\zeta \operatorname{tg} z}\left[\frac{3}{2} + \frac{\beta^2}{4\left(\gamma + \frac{k \operatorname{cosec} z}{1 - \operatorname{ctg}\zeta \operatorname{tg} z}\right)}\right]\frac{1}{\left(\gamma + \frac{k \operatorname{cosec}\zeta}{1 - \operatorname{ctg}\zeta \operatorname{tg} z}\right)},$$

причем в данном случае величины β и γ должны соответствовать удвоенному горизонтальному поглощению. Минимальное значение $\bar{h}$ оказывается

$$\min \bar{h} = 23.6 \text{ км}$$

приблизительно тем же самым, как и раньше.

В результате получаем:

ζ	92°	93°	94°	96°	98°
k . . .	0.170	0.133	0.114	0.095	0.087
$\bar{h}$ . . .	23.3	28.2	34.8	49.8	68.2 км.

3. В предыдущем нами не учитывалось влияние рефракции. Все траектории световых лучей в атмосфере рассматривались как прямолинейные. Это может внести некоторые погрешности, прежде всего понизить высоту эффективного слоя. Однако, если принять во внимание рефракцию, то задача сделается значительно сложнее, и указанный выше способ ее разрешения будет уже не применим. В этом случае приходится стать на путь числового интегрирования и пользоваться уже не градиентом сумеречной кривой, а просто отношением яркости сумерок через определенный интервал в зенитном расстоянии Солнца.

Поскольку, как мы уже видели, состояние тропосферы не оказывает заметного влияния (в случае рассеяния первого порядка) на сумеречные явления, мы не будем принимать во внимание температурные инверсии. Кроме того, нетрудно показать, что рефракция мало зависит от температурного градиента, но в гораздо большей степени от температуры у земной поверхности. Кроме того, исходя из связи между рефракцией и поглощением света, можно найти, что изменение рефракции из 0′.1 соответствует изменению поглощения примерно на

0.01 звездной величины. Это определяет точность, с которой должны производиться расчеты рефракции. За начальные условия примем:

$$t_0 = 273°; \qquad \frac{dt}{dh} = 5.5 \, \frac{\text{град}}{\text{км}}.$$

Не представляет затруднения обобщить теорию горизонтальной рефракции для всех высот в свободной атмосфере в пределах от 0 до 30 км. Для соответствующих высот и для 9 значений зенитного расстояния Солнца, именно, 84°, 85°, 86°, 87°, 88°, 88.5°, 89.0°, 89.5° и 90° вычисляем значения горизонтальной рефракции для всех траекторий световых лучей. Поглощение m, выраженное в звездных величинах, находим из обобщенной формулы Лапласа

$$m = \Sigma\Delta m = K \sum \frac{f \Delta \, \text{Refr}}{\sin \zeta},$$

где ζ видимое зенитное расстояние Солнца для данного отрезка траектории светового луча, f — фактор, мало меняющийся с высотой и K — постоянный коэффициент, который определяется из сравнения теории с наблюдениями, производимыми на высокогорных обсерваториях. Определив изменение рефракции для каждого конечного отрезка траектории светового луча, проходящего над земной поверхностью, найдя для того же отрезка соответствующее поглощение, можно построить вспомогательные таблицы, которые для заданных исходных условий (z, ζ, h) позволяют определить световой режим для каждого элемента объема внутри конуса телесного угла, под которым наблюдается яркость сумеречного неба. Разобьем атмосферу на ряд концентрических слоев толщиной в 6 км каждый. Общая яркость сумерок может быть представлена в виде

$$J_i = C\left[\rho_{i,\,i+1} \int_{(1)}^{(2)} j\,dr + \rho_{i+1,\,i+2} \int_{(2)}^{(3)} j\,dr + \ldots\right]\left[1 + \cos^2(\zeta - z)\right],$$

где каждый интеграл относится к соответствующему слою, причем

$$dr = dh \sec z \left(1 - \frac{h}{a} \operatorname{tg}^2 z\right).$$

При помощи вспомогательных таблиц не представляет труда найти ζ для границы каждого слоя. Далее по графикам сумерок берем отношение J_i/J_{i+1}.

Предположим, что для двух смежных выражений J_i, J_{i+1} плотность воздуха характеризуется одним определенным значением градиента k. Это дает возможность найти величину k из отношения $\frac{J_i}{J_{i+1}}$ путем последовательных проб.

Для разных высот этот способ дает следующее значение градиента k.

h	22.01	32.26	41.99	51.63	58.84	61.91 км
k	0.152	0.140	0.116	0.095	0.088	0.108

Это находится в общем согласии с аналогичными значениями k, приведенными выше. Сделать на основании нашего наблюдательного материала какие-либо заключения для высот, превышающих 60 км, не представляется возможным, так как наши наблюдения обрывались при зенитном расстоянии Солнца около 98°, т. е. значительно раньше полного окончания сумерок. Это было обусловлено несовершенством аппаратуры, в частности отсутствием надежного затвора, что повело к необходимости удлинить экспозицию до 5 секунд в начале вечера в момент захода Солнца, но тем самым не позволило фотографировать слабые сумерки даже с самыми значительными отверстиями трубочных фотометров.

Построив усередненную кривую по данным, полученным обоими способами, находим:

h	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65 км
k	0.152	0.138	0.128	0.118	0.110	0.102	0.095	0.089	0.086	0.085

Первое значение k найдено путем некоторой экстраполяции не вполне уверенно. В общем имеем несомненную тенденцию к уменьшению градиентов оптической плотности с высотой.

4. Для дополнительного контроля полученных результатов были вычислены сумерочные кривые в различных предположениях относительно k. Приведем для примера ход сумерочной кривой $\log J$ в случае постоянного k для всех рассматриваемых высот, именно равного 0.125.

ζ	90°6	92°0	94°1	96°2	96°2	96°9	97°5
выч. ($k = 0.125$)	1.46	1.20	0.659	0.230	—0.170	—0.536	—0.890
набл.	1.46	1.14	0.587	0.219	—0.080	—0.368	—0.620

Аналогичные вычисления с заранее заданным ходом k убеждают нас в том, что уменьшение k с высотой действительно вытекает из нашего наблюдательного материала. Имеем таким образом градиент плотности воздуха в виде некоторой функции высоты

$$k = f(h)$$

Искомая плотность ρ найдется из выражения

$$\rho \infty e^{-f(h)h}$$

Имеем в произвольных единицах:

h	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65 км
ρ	1.000	0.502	0.277	0.170	0.112	0.078	0.058	0.045	0.032	0.022

Величина ρ не есть плотность в собственном смысле этого слова. Она характеризует степень излучения света единицей объема воздуха под влиянием

проходящей через этот объем солнечной радиации. Совершенно безразлично, будет ли это свечение в высоких атмосферных слоях производиться рассеянием света, как это предполагалось выше, или в известной степени явится результатом флюоресценции, поскольку химический состав воздуха на всех этих высотах остается постоянным. Некоторое изменение произойдет от различия в характере индикатрисы рассеяния в обоих случаях, что, однако, не может иметь существенного значения. С другой стороны, поскольку флюоресценция вызывается весьма коротковолными радиациями, последние будут испытывать значительно большее поглощение в атмосфере. Высота эффективного слоя для тех же зенитных расстояний Солнца будет увеличена по сравнению с простым Релеевским рассеянием, но зависимость градиента плотности от градиента сумерочной кривой при данном ζ останется почти без изменения.

Мне кажется, что вопрос о наличии заметной флюоресценции высших слоев воздуха может быть решен следующим образом. Предположим, что сумерки наблюдаются одновременно в зените и на значительном зенитном расстоянии в вертикале Солнца. Очевидно, что солнечные лучи, освещающие элемент объема на данной высоте, проходят в первом случае более низкие атмосферные слои, которые благодаря содержанию озона и другим причинам могут быть совершенно непрозрачны для весьма короткой радиации. Совпадение результатов в обоих случаях будет, очевидно, аргументом против наличия заметной флюоресценции. Вопрос, однако, усложняется, если химический состав воздуха меняется с высотой, что, однако, представляется мало вероятным.

5. Выше было показано, что, зная изменение яркости сумерочного неба в вертикале Солнца на определенной высоте над горизонтом, можно вывести распределение плотности атмосферы с высотой в предположении, однако, что сумерочные явления обусловливаются рассеянием света лишь первого порядка. Результаты, конечно, не изменятся, если совокупный эффект членов высших порядков пропорционален первому порядку. Покажем теперь, каким образом можно наблюдаемую яркость сумерок освободить от рассеяния света высших порядков для того, чтобы изложенная выше теория могла быть строго применена для вывода строения атмосферы на разных высотах.

Строгая трактовка проблемы приводит к интегральному уравнению с тремя независимыми переменными типа Фредгольма, разрешить которое представляется безнадежным. Кроме того результат зависит очевидно от того, каков характер рассеяния света по различным направлениям, т. е. от того, какова индикатриса рассеяния для всей атмосферы в целом. Свойства атмосферы в этом отношении могут быть определены только путем эксперимента. Вследствие этого учет рассеяния света высших порядков был мною сделан следующим несколько упрощенным образом.

Сумерочные явления, зависящие от рассеяния света первого порядка, сосредоточены почти исключительно в стратосфере. При рассеянии солнечного света в разреженных стратосферных слоях эффект высших порядков ничтожно мал и чувствительно пропорционален рассеянию первого порядка. С другой стороны, рассеяние света в более низких тропосферных слоях уже вскоре после захода Солнца обусловливается лишь рассеянием высших порядков, так как подобные слои непосредственно не освещаются Солнцем. Нам, следовательно, необходимо изыскать возможность отделить стратосферные сумерки от тропосферных или по крайней мере показать, что яркость одних изменяется пропорционально яркости других. В согласии с этим предположим, что стратосферные сумерки, зависящие от свечения разреженных и сравнительно весьма отдаленных от нас атмосферных слоев, являются внешним источником света по отношению к нижним тропосферным слоям. Предположим, что стратосферные сумерки таким же образом производят сумерки в тропосфере, каким внешний источник света, например Солнце, находящееся над горизонтом наблюдателя, производит свечение небесного свода.

С этой точки зрения для решения задачи необходимо вычислить стратосферные сумерки на всем небесном своде и для любого погружения Солнца под горизонт и проанализировать освещенность дневного небесного свода при совершенно ясном небе с целью определения индикатрисы рассеяния и вывода влияния на освещенность неба атмосферной толщи.

Для решения первой части поставленной задачи достаточно рассматривать рассеяние света лишь первого порядка. Обобщая указанные выше формулы на весь небесный свод и ограничиваясь при этом лишь первым членом, находим для яркости сумерочного неба в точке z, A (z — зенитное расстояние, A — азимут, считаемый от вертикала Солнца)

$$(6)\quad J_{z,A} \infty \frac{(-\beta)\sqrt{\pi}\,(1+\cos^2\vartheta)\sec z\,(\sin\zeta-\cos\zeta\,\mathrm{tg}\,z\cos A)^{\frac{1}{2}}}{[k+\gamma(\sin\zeta-\mathrm{tg}\,z\cos\zeta\cos A)]^{\frac{3}{2}}}\, e^{\frac{ka(\sin\zeta-1)}{\sin\zeta-\cos\zeta\,\mathrm{tg}\,z\cos A}+\frac{\beta^2}{4\left(\gamma+\frac{k}{\sin\zeta-\cos\zeta\,\mathrm{tg}\,z\,\mathrm{tg}\ldots}\right.}}$$

где k — градиент плотности воздуха с высотой, β, γ — указанные выше параметры, характеризующие атмосферное поглощение света, ζ — зенитное расстояние Солнца, ϑ — угловое расстояние данного элемента небесного свода от Солнца.

С другой стороны, наблюдения поставленные мною в 1932 и 1933 г., показывают с несомненностью, что освещенность в любой точке небесного свода может быть представлена как произведение двух функций, из которых одна — индикатриса рассеяния — зависит только от углового расстояния от Солнца, другая от толщи атмосферы для данного направления луча зрения и зенитного

расстояния Солнца. С достаточной точностью имеем для освещенности дневного небесного свода

$$i = \frac{p^{\sec z} - p^{\sec\zeta}}{\sec\zeta - \sec z} \sec z\, f(\vartheta),$$

причем p означает показатель прозрачности атмосферы. Если элемент небесного свода, освещенность в котором мы рассматриваем, находится в вертикале Солнца, то

$$\cos\vartheta = \cos z \cos\zeta + \sin z \sin\zeta \cos A.$$

Применим это выражение для освещенности небесного свода к каждому элементу стратосферных сумерок. В результате получим для рассеяния света высших порядков в нижних атмосферных слоях (тропосферные сумерки)

$$(7) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} J(A, z) \sin z\, dz\, dA \frac{p^{\sec z'} - p^{\sec z}}{\sec z - \sec z'} \sec z\, f(\vartheta),$$

где z' — зенитное расстояние элемента стратосферных сумерок, играющее роль зенитного расстояния Солнца в предыдущем случае.

Функция $J(A, z)$ вычислена в произвольных единицах для разных зенитных расстояний Солнца, для следующих значений параметров k, β, γ. Параметры β и γ брались применительно к удвоенному горизонтальному поглощению света.

Имеем:

ζ	92°	94°	96°	98°
k	0.125	0.114	0.095	0.087
β	—6.496	—6.496	—6.496	—6.496
γ	0.580	0.580	0.580	0.580

Для разных точек небесного свода находим:

A = 0°

z \ ζ	92°	94°	96°	98°
80°	635	411	279	133
70	255	130	67.5	22.2
60	150	68.0	30.5	8.08
50	101	42.6	17.4	3.97
40	73.2	29.5	11.2	2.29
30	56.1	21.8	7.84	1.55
0	38.0	13.9	4.49	0.69

A = 30°

z \ ζ	92°	94°	96°	98°
80°	533	328	211	94.3
70	219	107	53.4	16.4
60	132	58.0	26.1	6.28
50	90.6	37.5	14.8	3.24
40	67.3	26.8	9.96	1.97
30	53.1	20.4	7.25	1.33
0	38.0	13.9	4.49	0.69

A = 60°

z \ ζ	92°	94°	96°	98°
80°	335	174	92.2	31.5
70	150	65.7	28.1	6.84
60	95.6	39.1	15.1	3.15
50	70.1	27.5	10.0	1.90
40	55.7	21.3	7.09	1.34
30	47.1	17.7	6.05	1.03
0	38.0	13.9	4.49	0.69

A = 90°

z \ ζ	92°	94°	96°	98°
80°	218	79.6	51.2	3.89
70	111	40.4	13.0	1.98
60	75.9	27.7	8.92	1.36
50	59.1	21.6	6.95	1.06
40	49.6	18.1	5.84	0.89
30	43.9	16.0	5.18	0.79
0	38.0	13.9	4.49	0.69

A = 120°

z \ ζ	92°	94°	96°	98°
80°	209	41.9	4.18	0.06
70	121	34.6	7.26	0.50
60	84.7	26.9	6.79	0.67
50	65.4	21.8	6.04	0.69
40	53.6	18.5	5.40	0.68
30	46.1	16.3	4.93	0.67
0	38.0	13.9	4.49	0.69

A = 150°

z \ ζ	92°	94°	96°	98°
80°	231	22.4	0.27	0.00
70	150	34.1	4.49	0.11
60	106	29.6	6.39	0.38
50	79.4	24.5	5.91	0.52
40	62.4	20.5	5.48	0.58
30	51.0	17.5	5.01	0.61
0	38.0	13.9	4.49	0.69

A = 180°

z \ ζ	92°	94°	96°	98°
80°	240	16.1	0.05	0.00
70	164	33.8	3.60	0.05
60	116	30.8	5.61	0.28
50	86.3	25.8	5.89	0.47
40	66.7	21.5	5.54	0.56
30	53.4	18.1	5.07	0.59
0	38.0	13.9	4.49	0.69

Заметим, что функция $J(z, A)$ значительно уменьшается с увеличением k, но сравнительно слабо чувствительна к изменениям β и γ.

Для функции $f(\vartheta)$ (индикатриса рассеяния) приняты следующие значения, полученные мною на основании анализа освещенности дневного небесного свода.

(ϑ)	0°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$f(\vartheta)$	—	154	105	82.5	65	49	36.5	28.9	25.2	23.4
ϑ	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
$f(\vartheta)$	23.4	23.0	23.5	24.8	25.8	26.6	27.3	27.2	27.1	27.0

Мы видим, что для земной атмосферы в целом индикатриса рассеяния резко отличается от Релеевской или даже от индикатрисы Ми, показывая гораздо бо́льшую асиметрию, особенно при малых угловых расстояниях от Солнца. Будем предполагать, что рассеивающие свойства воздуха не изменяются и после захода Солнце по крайней мере в первые часы ночи. Полагая, далее,

$$p = 0.8,$$

что хорошо удовлетворяет дневным наблюдениям над освещенностью небесного свода, вычисляем подинтегральное выражение (7), представляющее освещенность, производимую источником света площадью $\sin z\, dz\, dA$ и поверхностной яркостью $J(z, A)$ на точку неба с координатами z', 0, т. е. лежащую в вертикале Солнца. Сумма подобных выражений, взятая по всему небесному своду, дает общее влияние стратосферных сумерок на выбранную нами точку. Вычислим указанную сумму для двух точек, расположенных в вертикале Солнца симметрично относительно зенита на высоте 20° от горизонта. Нанеся вычисленные значения подинтегральной функции на сетку, построенную в равновеликой проекции, проводим изофоты и затем при помощи планиметра измеряем площади между ними, умножая их на соответствующие средние значения освещенности. Результаты получены следующие (в произвольных единицах):

ζ	запад	восток
92°	387	258
94	163	79.4
96	88.3	37.4
98	33.0	5.4

Приведенные здесь числа не вполне надежны, так как нахождение суммы в области сферы около точки заката Солнца, где яркость относительно очень велика и быстро меняется, весьма затруднительно.

Сравним эти результаты с яркостью сумерок, зависящей от рассеяния света лишь первого порядка в той же точке неба. Имеем:

	Рассеяние первого порядка		Рассеяние высших порядков	
	запад	восток	запад	восток
ζ = 92°	1.00	0.64	1.00	0.67
94	0.51	0.132	0.42	0.205
96	0.26	0.014	0.23	0.096
98	0.087	0.000	0.085	0.014

Принятая нами упрощенная формула (6) для вычисления яркости стратосферных сумерок в любой точке небесного свода не вполне соответствует действительности и представляет лишь общий характер явления. Это, однако, в данном случае не имеет существенного значения. Важно лишь отметить, что яркость сумерок, вычисляемая по этой формуле с учетом рассеяния первого порядка, оказывается довольно близко пропорциональной совокупному влиянию членов высших порядков, вычисляемых на основе т о й ж е ф о р м у л ы, исходя из действительно наблюдаемой в тропосфере индикатрисы рассеяния света.

Поэтому можно считать, что в первом приближении возможно на основании наблюдений над сумерочной кривой определить строение атмосферы на различных высотах, согласно указанному выше способу.

Можно, однако, учесть влияние членов высших порядков следующим образом. При зенитном расстоянии Солнца большем 98° освещенность неба в восточной части солнечного вертикала на высоте 20° зависит уже исключительно от рассеяния света высших порядков, в эту область неба больше не попадают прямые солнечные лучи. Указанным выше полуграфическим способом вычисляем отношение рассеяния высших порядков в точках неба, симметричных относительно зенита, в которых ведутся наблюдения над освещенностью сумерочного неба. Умножая на это отношение яркость в восточной точке, получаем яркость в западной, какая имела бы место в случае рассеяния лишь высших порядков. Вычитая ее из наблюдаемой яркости в западной точке, находим яркость ее, зависящую исключительно от рассеяния первого порядка. Для применения подобного же способа к наблюдениям сумерок при меньших зенитных расстояниях Солнца необходимо, очевидно, найти не только отношение эффектов рассеяния света высших порядков в точках симметричных относительно зенита, но также изменение этих эффектов в зависимости от зенитного расстояния Солнца. Контролем правильности вводимой поправки служит, очевидно, совпадение ее с наблюдаемой сумерочной кривой в восточной части неба при $L > 98°$.

Выводы

1. В 1930 г. на Кучинской астрофизической обсерватории при помощи трубочных фотометров наблюдалась освещенность неба в двух точках, расположенных в вертикале Солнца, симметрично относительно зенита на высоте около 20° над горизонтом от момента заката до зенитного расстояния солнца в 98°.

2. В предположении, что сумерочные явления обусловливаются рассеянием света лишь первого порядка, можно, принимая во внимание поглощение и преломление света на каждом отрезке траекторий солнечных лучей, определить градиент плотности атмосферы с высотой. Результаты не меняются, если совокупный эффект рассеяния высших порядков пропорционален рассеянию света первого порядка.

3. Рассеяние высших порядков, имеющее место по преимуществу в тропосфере, может быть вычислено, если рассматривать каждый элемент неба, освещенного прямыми солнечными лучами, как внешний источник света. В результате соответствующих вычислений показывается, что существует приблизительная пропорциональность интенсивности рассеяния первого и высших порядков. Можно таким образом думать, что полученные результаты, выведенные в предположении рассеяния лишь первого порядка примерно соответствуют действительности.

Поставленная проблема чрезвычайно сложна и требует как дальнейшего развития ее с теоретической стороны, так и постановки дальнейших наблюдений. Наблюдения необходимо ставить по крайней мере в двух точках неба в вертикале Солнца на западе и востоке и притом вплоть до окончания астрономических сумерок. Для суждения о природе свечения в высоких атмосферных слоях желательно кроме того наблюдать сумерки в зените.

Кучино. Астрофизическая обсерватория МГУ.

B. FESSENKOFF. INVESTIGATION DE LA STRATOSPHÈRE AU MOYEN DE L'ANALYSE PHOTOMÉTRIQUE DU CRÉPUSCULE

RÉSUMÉ

En 1930 à l'Observatoire astrophysique de Kutchino (près de Moscou) on a observé l'intensité lumineuse du ciel crépusculaire dans les points symétriques par rapport au zénith du moment du coucher jusqu'à la distance zénithale du Soleil de 98°.

Supposant en première approximation que le phénomene du crepuscule n'est produit que par la diffusion de lumière du premier ordre, on peut, en tenant compte de l' absorption, de la réfraction etc. dans l'atmosphère, calculer le gradient de la densité de l'air ou pour mieux dire le gradient de son pouvoir diffusant rapporté à l'unité de volume. Les calculs pareils sont effectués par les méthodes différentes. Les résultats exprimés en unités arbitraires sont les suivants:

Hauteur en km: . . .	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Densité:	1000	0.502	0.277	0.170	0.112	0.078	0.058	0.045	0.032

Les diffusions d'ordres supérieurs, qui ont lieu presque exclusivement dans la troposphère, peuvent être évaluées approximativement. A cet effet chaque élément du ciel eclairé en raison de la diffusion du premier ordre (crépuscule stratosphérique) est considéré comme une source extérieure de lumière. L'éclairage des couches plus basses de l'atmosphère est supposé donc d'être produit de la même façon que l'éclairage du ciel diurne par le Soleil, ce que peut être déduit théoriquement et vérifié par les observations.

Les calculs basés sur ces considérations ont montré qu'il existe la proportionnalité approximative entre l'intensité de la diffusion lumineuse du premier ordre et celle d'ordres supérieurs. On peut en conclure que les résultats obtenus sont probablement réels.

Il est à noter que le problème de la photométrie du crépuscule est très compliqué au point de vue théorique. Pour son développement ultérieur il est nécessaire d'organiser l'enrégistrement systématique de l'éclat du crépuscule aux points symétriques par rapport au zénith choisis dans le plan vertical passant par le Soleil.

Observatoire astrophysique
de l'Université de Moscou. Kutchino.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

СУТОЧНАЯ СОЛНЕЧНАЯ ВОЛНА КОЛЕБАНИЙ ШИРОТЫ МЕСТА ПО НАБЛЮДЕНИЯМ В. СТРУВЕ 1840—1842 гг. В ПУЛКОВЕ

А. С. ВАСИЛЬЕВА

(*Представлено академиком* А. А. Белопольским)

§ 1. Введение.

В 1910 году, при наблюдениях зенитных расстояний на пулковском большом пассажном инструменте, установленном в первом вертикале, я подметил, что наблюдения, почти одновременно выполненные, дают в значениях широты уклонения, весьма часто между собою согласные, и этого вообще не бывает в наблюдениях, разделенных 9—15 час. времени. Директор обсерватории, убежденный в том, что я наблюдаю в этом факте ошибки инструмента, приказал наблюдения прекратить.[1] Это пришлось в 1911, 5 г. исполнить. Однако, разработка этих самых, полученных мною в 1908,6—1911,5 гг., наблюдений уже к 1917 году позволила мне не только выявить закономерности в подмеченных систематических уклонениях, но и составить гипотезу о том, что кратковременные колебания широты места возникают не из инструмента, а из атмосферы, и именно из перемены формы наружной поверхности ее преломляющего слоя. Это мое исследование, с изложением всего механизма явления, было представлено к печати в 1917 г. и опубликовано в 1919 г.[2] Кратко о полученных закономерностях удалось опубликовать в 1914 г.[3]

[1] См. Отчеты Пулковской обсерватории за 1910—1911 гг., стр. 21, и за 1911—1912 гг., стр. 23. Также в Известиях Российской Академии Наук 1917 г., стр. 1048—1049. Подробности в статьях: А. С. Васильев. Пассажный инструмент в первом вертикале и зенит-телескоп в результатах наблюдений широты места. Изв. Акад. Наук, 1917, стр. 1042—1070 и 1167—1177; А. С. Васильев. 70 лет истории Пулковского пассажного инструмента, § 1. Известия Русского Астрономического общества, 1912, №№ 9 и 10.

[2] А. С. Васильев. Влияние формы и приливов земной атмосферы на зенитные расстояния светил. Изв. Росс. Акад. Наук, 1919, стр. 175—206; см. также Циркуляры Главной обсерватории, № 28, 1917, июнь.

[3] А. С. Васильев. Сравнение результатов и наблюдений над широтою, произведенных в 1908—1911 гг. в Пулкове на пассажном инструменте в первом вертикале параллельно с зенит-телескопом. Изв. Акад. Наук, 1916, № 16.

После этого с 1917 г. до настоящего времени мною осуществлен новый большой ряд наблюдений на том же инструменте в первом вертикале над широтою места, и самоотверженным участием в вычислениях Н. И. Васильевой наблюдения обработаны до значений мгновенной широты для годов 1917,2—1929,5.

Оказывается, что и новый ряд наблюдений выявляет кратковременные колебания и периодические и неправильные. Нам удалось найти новые, лучшие, чем в 1912—1916 гг., методы выявления кратковременных колебаний, удалось в специальной литературе найти и старые наблюдения, надлежащей обработкой которых наши выводы подтверждаются.

§ 2. Суточные колебания широты.

В 1913—1917 гг., получивши из наблюдений зависимость колебаний широты от часовых углов Луны,[1] я пытался аналитически заключать об аналогичной зависимости колебаний широты и от часовых углов Солнца. Получение прямо из наблюдений волны суточной солнечной представило тогда для нас трудности потому, что малое количество наблюдений дневных давало для некоторых часов дня средние значения широты с недостаточно малой средней ошибкой, а главное потому, что фаза суточной волны не сходилась с фазой суточной волны лунной. Однако, уже в 1914 году мы имели и числа и графики обеих этих волн.[2]

Теперь разработка нового ряда наблюдений 1917,2—1929,5 гг. и применение для выявления кратковременных колебаний методов новых выяснили, что в колебаниях широты солнечная суточная волна реально существует, что амплитуда ее в действительности больше, а не меньше, как мы тогда предполагали, амплитуды волны лунной, что и по своей фазе солнечная волна не аналогична волне лунной. Это значит, что выявленная нами (мною и Н. И. Васильевой) теперь солнечная суточная волна есть результат интерференции по меньшей мере двух солнечных волн, одной, связанной действием силы притяжения на атмосферу, и другой, возникающей, вероятно, из суточного хода температур. Это обстоятельство побудило нас волны суточную лунную и суточную солнечную в колебаниях широты изучать обособленно.

§ 3. Выводы М. О. Нюрена в 1870 г.

В 1910 и 1917 гг. кратковременные колебания широты места прямо отрицались, теперь суждения о них допускаются, но с крайним сомнением. На трудное и весьма важное для всей астрономии дело изучения кратковременных колебаний широты места не отпускается никаких средств. Это обстоятельство

[1] А. С. Васильев. Притягательные действия Луны и Солнца на земную атмосферу и эллипсоидальность ее формы в наблюдениях астрономических. Циркуляры Главной обсерватории, № 28, 1917.

[2] А. С. Васильев. Сравнение результатов наблюдений над широтою, произведенных в 1908—1911 гг. в Пулкове. Изв. Акад. Наук, 1916, стр. 1602, 1614, 1616.

вынуждает нас для наших исследований подбирать материалы не лучшие для выяснения дела, а такие, которые в вычислениях достаточно подготовлены, — вынуждает присутствие кратковременных колебаний все еще доказывать вместо того, чтобы уже выявлять их свойства.

В настоящем исследовании мы на наблюдениях В. Струве испытываем метод, от применения которого к нашим собственным, много более обширным во времени и более густо распределенным наблюдениям ожидаем выводов весьма разносторонних и ценных.

Астроном Пулковской обсерватории М. О. Нюрен, наблюдавший на этом же инструменте в 1870—1871, 1875—1878 и 1880—1881 гг., в своей работе «Bestimmung der Nutation der Erdaxe», 1872 г., на стр. 34 напечатал таблицу, в которой сопоставил остаточные ошибки наблюдений В. Струве 1840—1842 гг. для тех дней, когда наблюдений было получено больше, чем одно. Это те самые остаточные ошибки, которые получились у В. Струве в результате вывода из эмпирических уравнений его знаменитого значения аберрационной постоянной $k = 20\overset{''}{.}445$. Таблицу 1 привожу на стр. 1520 и сл.

«Из этого сопоставления можно видеть, напечатал в 1872 г. М. О. Нюрен, что не было бы достаточно правильным, если бы по наблюденным в эти годы уклонениям в склонениях мы стали делать заключение о периодических переменах в широте (Polhohe). Если такие перемены и оказали влияние на приведенные разности (наблюдение — вычисление), то наибольшую часть влияний приходится приписать причинам совсем другим» (стр. 35) «Наблюдения звезд с почти одинаковым прямым восхождением, т. е. наблюдения почти одновременные приходится признать искаженными почти одинаковыми ошибками, — суточные ли это колебания или еще более короткой периодичности, или даже это колебания без всякого периода, но зависят они только от случайных перемен температуры» (стр. 34). Именно это явление одинаковых уклонений близко расположенных наблюдений, так сформулированное Нюреном в 1872 г., я подметил в 1910 г.

Определиться правильно дальше в подмеченном факте и в вышеприведенной таблице Нюрену не удалось. На стр. 38 в той же его работе 1872 г. мы читаем: «Приходится принять за вероятное, что в наблюденных зенитных расстояниях существует закономерное периодическое изменение, объяснить причину которого мы еще не в состоянии. Возникают ли эти перемены из перемещения масс внутри Земли, или они следствие перемен в самом инструменте, или в столбе, на котором инструмент покоится, или, наконец, в атмосферных элементах, — это мы вынуждены оставить неразъясненным. Однако, пока периодические дислокации в Земле, как их предполагает первая гипотеза, хотя и не невероятны, но не доказаны, до тех пор нам приходится принять остальные объяснения за вероятнейшие». Итак, по Нюрену, выходит, что особенности уклонений в склонениях, представляемые в таблице 1, возникают из инструмента.

Таблица 1

Разности В. Струве для дней, когда наблюдений было больше, чем одно

Дата	β Кассиопеи ч м 0 1	δ Кассиопеи ч м 1 15	υ Б. Медведицы ч м 9 40	ι Дракона ч м 15 21	b Дракона ч м 18 22	o_2 Дракона ч м 18 49	2H Цефея ч м 19 53
1840 VIII 20	—	—	—	+0,"15	0,"00	—	—
23	—	—	—	+ .25	— .22	—	—
25	—	—	—	+ .14	+ .07	—	—
27	—	—	—	— .15	— .11	—	—
IX 24	—	—	—	—	+ .15	+0,"48	—
26	—	—	—	—	+ .11	+ .15	—
28	—	—	—	—	.00	— .16	—
X 3	—	—	—0,"01	—	— .03	+ .10	—
4	—	—	+ .18	—	+ .20	+ .14	—
5	—	—	+ .07	—	+ .29	+ .05	—
29	—	—	— .12	—	—	—	+0,"01
XI 1	—	—	— .32	+ .18	—	—	—
2	—	—	+ .09	+ .06	—	—	+ .15
1841 II 16	—	—	—	— .23	—	+ .07	—
III 16	—	—	—	— .08	— .10	—	—
31	—	—	— .13	—	—	+ .16	+ .08
IV 14	—	—	+ .19	—	— .09	+ .05	—
V 9	—	—	.00	—	— .25	— .33	— .11
24	—	—	— .11	— .21	—	—	—
25	—	—	+ .09	— .45	—	—	—
27	+0,"07	+0,"33	+ .15	— .06	—	—	—
29	+ .05	—	+ .35	— .12	—	—	—
30	—	—	+ .05	+ .31	—	—	—
31	+ .26	+ .10	+ .04	—	—	—	—
VI 15	— .32	— .19	—	—	—	—	—
22	— .14	— .12	—	—	—	—	—
IX 23	—	—	— .01	—	+ .52	—	—
X 3	— .03	—	— .08	—	—	— .19	—
XI 1	— .17	—	— .09	+ .19	—	.00	— .09
2	— .14	— .25	—	+ .07	—	— .15	— .29
8	—	—	—	—	—	— .05	— .05
29	— .13	— .33	—	—	—	—	—
XII 18	+ .07	+ .10	—	+ .17	—	— .08	—
1842 I 13	— .13	+ .23	+ .09	—	—	—	—
14	+ .08	+ .06	— .25	—	—	— .01	—
15	+ .24	+ .18	— .09	—	—	+ .03	—
16	— .08	— .05	+ .09	—	—	—	—

(Продолжение)

Дата	β Кассиопеи ч м 0 1	δ Кассиопеи ч м 1 15	υ Б. Медведицы ч м 9 40	ι Дракона ч м 15 21	b Дракона ч м 18 22	o_2 Дракона ч м 18 49	2*H* Цефея ч м 19 53
1842 II 7	+0″33	+0″19	—	—	—	—	—
17	+ .14	+ .12	—	—	—	—	—
III 18	+ .28	—	—	—	—	+0″25	—
IV 3	+ .08	—	—	—	—0″11	—	—
13	+ .31	+ .46	—	—	—	— 0.1	+0″12
18	+ .35	+ .24	—	+0″12	—	+ .11	— .03
25	—	—	—	—	—	+ .26	+ .09
V 13	—	—	+0″05	+ .15	—	—	—
15	—	—	— .04	+ .05	—	—	—
21	—	—	+ .03	+ .13	—	—	—
30	— .11	—	— .02	—	—	—	—
VI 5	+ .06	— .09	—	—	—	—	—
22	+ .22	+ .22	—	—	—	—	—
23	— .03	— .03	—	—	—	—	—
X 12	— .17	— .09	—	—	—	+ .12	— .01
13	— .45	— .52	—	—	—	— .20	— .23
16	+ .03	— .13	+ .08	—	—	— .19	—
17	—	—	—	—	—	+ .21	+ .09
21	— .14	— .06	—	—	—	—	—
23	— .26	— .40	— .03	—	—	—	—
XII 6	+ .20	+ .30	—	—	—	—	—
17	+ .01	+ .11	—	—	—	—	—

§ 4. Каково же было состояние инструмента?

Наше исследование, опубликованное в 1928 году[1] с полной отчетливостью показало, что части инструмента уже в 1872 году в азимутальном отношении были недостаточно выверены, но был ли инструмент в таком же положении при В. Струве? — Таблица 1 и таблица 5 в названном выше нашем исследовании 1928 года с полной отчетливостью выявляют, что наилучшим состояние инструмента было при наблюдениях Ома в 1861,66—1863,90 гг., было хорошим и при В. Струве 1840—1859 гг. Те самые свойства в переменах азимута, которые были подмечены Нюреном,[2] я нашел в инструменте в 1908 г., причину их разгадал и тогда же полностью причину устранил.

[1] А. С. Васильев. Условия надежного нивелирования горизонтальной оси в пассажных инструментах. Изв Акад. Наук СССР, 1928, стр. 319—346; А. С. Васильев. Нереальная оценка точности нивелирований горизонтальной оси в пассажных инструментах. Изв. Акад. Наук СССР, 1928, стр. 151—172, 215—240, 303—318. Обе представлены к печати в 1926 г.

[2] M. Nyren. L'aberration des étoiles fixes, 1883 стр. 7.

§ 5. Наша организация решения задачи, — уравнения.

Так как мы из своих наблюдений и 1908,6—1911,5 гг. и 1918—1929,5 гг. уже получили и притом вполне согласно суточные колебания широты с амплитудой не малой, с фазой вполне ясно выраженной, то естественно теперь предположить, что всякая разность $\Delta =$ наблюдение — вычисление в вышеприведенной табл. 1, Нюрена, возникает, составляется из таких слагаемых:

$$\Delta = x + a \cos(\sigma - \nu) + f + \lambda, \tag{1}$$

где σ — часовой угол Солнца, a — амплитуда суточного солнечного колебания, ν — фаза этого колебания, x — поправка склонения наблюдавшихся звезд, f — сумма всех колебаний периодов длинных; эти последние колебания, имея медленно изменяющийся аргумент, присоединяются частью к неизвестным x, частью к остаточным ошибкам λ. Полагая

$$\cos(\sigma - \nu) = \cos\sigma \cos\nu + \sin\sigma \sin\nu \tag{2}$$

и затем еще полагая

$$\begin{matrix} a \cos\nu = y \\ a \sin\nu = z \end{matrix}, \quad \tan\nu = \frac{z}{y}, \quad a = \sqrt{y^2 + z^2}, \tag{3}$$

мы имеем уравнения ошибок

$$x + y\cos\sigma + z\sin\sigma = \Delta + \lambda. \tag{4}$$

Что колебания f включаются в x и в λ, это решению задачи нисколько не вредит, так как нас интересуют, главным образом, неизвестные y и z, иначе говоря, амплитуды a и фаза ν. Так как В. Струве наблюдал не одну звезду, а 7 звезд, то в реальные уравнения ошибок мы вместо x ставим соответственные неизвестные, которые обозначаем буквами звезд: β, δ, υ, ι, b, o, c (см. табл. 1).

Всего мы имеем 157 уравнений с 9 неизвестными. В нижеприлагаемом списке уравнений первый столбец содержит дату наблюдения, второй значение аргумента, т. е. часовые углы Солнца в момент прохождения звезды через меридиан во время наблюдения. Дальнейшие столбцы содержат соответственные коэффициенты неизвестных и значения $l = \Delta$ члена известного. Последний столбец H—B содержит остаточные ошибки $\lambda =$ наблюдение — вычисление, получившиеся в результате подстановки в уравнения уже определенных нами значений неизвестных. Решение уравнений проведено в предположении, что наблюдались склонения звезд, как в действительности построены уравнения у самого В. Струве в «Sur le coefficient constant dans l'aberration des étoiles fixes...», 1843 г.

§ 6. Распределение наблюдений.

Для ясности выводов и для облегчения возможности сравнения с выводами из наших собственных наблюдений интересно проследить распределение наблюдений (см. табл. 3).

Наблюдения начаты 20 VIII 1840 г., закончены 17 XII 1842 г. В 1841 г. наблюдений не оказывается совсем в двух летних месяцах, в 1842 г. — в трех летних месяцах. Наблюдения δ Кассиопеи и β Кассиопеи начаты только 27 V 1841. наблюдения *b* Дракона закончены уже 3 IV, а ι Дракона — 21 V 1842 г.

Так как В. Струве производил наблюдения с целью определения аберрационной постоянной, то естественно, что его наблюдения группируются около 6 час. вечера и 7 час. утра; третий максимум количества наблюдений заметен около 11 час. ночи. Из остаточных ошибок, получившихся у В. Струве, 141 в таблицу Нюрена не вошли, как не сопровождавшиеся хотя бы еще одним наблюдением в тот же день. Эти наблюдения не вошли и в наше нижеследующее вычисление, так как мы вынуждены крайне экономить наше время и вычислительные средства. Введение в вычисление и этих наблюдений повысило бы только вес наших значений для неизвестных *y* и *z*. В исследование Р. Шуманна, о котором мы скажем ниже, вошли и эти 141 наблюдения.

§ 7. Решение уравнений.

В результате решения уравнений (см. табл. 4) получаем такие значения неизвестных, их обратных весов и средних ошибок неизвестных:

	x	Обратн. вес	Средняя ошибка
z =	+ 0.″024	0.0104	± 0.″018
y	+ 0.132	0.0200	.024
β	+ 0.009	0.0323	.031
υ	— 0.002	0.0359	.033
δ	+ 0.017	0.0402	.034
o	— 0.007	0.0411	.035
ι	+ 0.055	0.0509	.039
b	— 0.026	0.0692	.045
c	— 0.023	0.0775	.048

Для нашего исследования особый интерес представляют только значения неизвестных *y* и *z*. Мы видим, что их определение получилось с достаточно большим весом и с достаточно малой средней ошибкой.

При этом сумма квадратов остаточных ошибок

$$[\lambda\lambda] = 5.4067 - 0.9769 = 4.4298 \quad \text{по формуле,} \qquad (5)$$
$$= 4.3933 \quad \text{из уравнений.}$$

Отсюда средняя ошибка одного уравнения и, что в данной организации решения задачи то же самое, одного наблюдения

$$\mu = \sqrt{\frac{4.4016}{157-9}} = 0.029740 = \pm 0.''172. \qquad (6)$$

Это значение согласно со всеми нашими уже опубликованными исследованиями.[1]

[1] См., например, А. С. Васильев. Зенитные расстояния, получаемые на Пулковском пассажном инструменте в первом вертикале, § 20. Изв. Акад. Наук СССР. 1932, № 2, стр. 200, и еще раньше, в 1917 г.: А. С. Васильев. Пассажный инструмент в первом вертикале и зенит-телескоп в результатах наблюдений широты места, § 13. Изв. Акад. Наук., 1917, стр. 1175.

Таблица 2

Уравнения ошибок

Дата	Час. уг. ⊙	β	δ	υ	ι	b	o	c	y	z	l	H—B
	ч м											
1840 VIII 20	5 22	—	—	—	1	—	—	—	+.165	+ .986	+0″15	+0″05
	8 22	—	—	—	—	1	—	—	—.581	+ .814	.00	+ .08
23	5 11	—	—	—	1	—	—	—	+.212	+ .977	+ .25	+ .14
	8 11	—	—	—	—	1	—	—	—.541	+ .841	— .22	— .14
25	5 4	—	—	—	1	—	—	—	+.242	+ .970	+ .14	+ .03
	8 4	—	—	—	—	1	—	—	—.515	+ .857	+ .07	+ .14
27	4 56	—	—	—	1	—	—	—	+.276	+ 961	— .15	— .26
	7 56	—	—	—	—	1	—	—	—.485	+ .875	— .11	— .04
IX 24	6 16	—	—	—	—	1	—	—	—.070	+ .998	+ .15	+ .16
	6 43	—	—	—	—	—	1	—	—.187	+ .982	+ .48	+ .47
26	6 9	—	—	—	—	1	—	—	—.039	+ .999	+ .11	+ .12
	6 36	—	—	—	—	—	1	—	—.156	+ .988	+ .15	+ .14
28	6 2	—	—	—	—	1	—	—	—.009	+1.000	.00	+ .05
	6 28	—	—	—	—	—	1	—	—.122	+ .993	— .16	— .16
X 3	21 2	—	—	1	—	—	—	—	+.713	— .701	— .01	— .09
	5 44	—	—	—	—	1	—	—	+.070	+ .998	— 0.3	— .04
	6 11	—	—	—	—	—	1	—	—.048	+ .999	+ .10	+ .08
4	20 58	—	—	1	—	—	—	—	+.701	— .713	+ .18	+ .11
	5 40	—	—	—	—	1	—	—	+.087	+ .996	+ .20	+ .19
	6 7	—	—	—	—	—	1	—	—.031	+1.000	+ .14	+ .11
5	20 54	—	—	1	—	—	—	—	+.688	— .725	+ .07	0
	5 36	—	—	—	—	1	—	—	+.105	+ .995	+ .29	+ .28
	6 3	—	—	—	—	—	1	—	—.013	+1.000	+ .05	+ .02
29	19 24	—	—	1	—	—	—	—	+.358	— .934	— .12	— .14
	5 37	—	—	—	—	—	—	1	+.100	+ .995	+ .01	0
XI 1	19 13	—	—	1	—	—	—	—	+.313	— .950	— .32	— .34
	0 54	—	—	—	1	—	—	—	+.972	+ .233	+ .18	— .01
2	19 9	—	—	1	—	—	—	—	+.297	— .955	+ .09	+ .08
	0 50	—	—	—	1	—	—	—	+.976	+ .216	+ .06	— .13
	5 22	—	—	—	—	—	—	1	+.165	+ .986	+ .15	+ .13
1841 II 16	17 21	—	—	—	1	—	—	—	—.169	— .986	— .23	— .24
	20 49	—	—	—	—	—	1	—	+.672	— .740	+ .07	0
III 16	15 36	—	—	—	1	—	—	—	—.588	— .809	— .08	— .04
	18 37	—	—	—	—	1	—	—	+.161	— .987	— .10	— .07
31	9 1	—	—	1	—	—	—	—	—.710	+ .704	— .13	— .05
	18 10	—	—	—	—	—	1	—	+.044	— .999	+ .16	+ .17
	19 14	—	—	—	—	—	—	1	+.317	— .948	+ .08	+ .08
IV 14	8 9	—	—	1	—	—	—	—	—.534	+ .846	+ .19	+ .24
	16 51	—	—	—	—	1	—	—	—.297	— .955	— .09	0
	17 17	—	—	—	—	—	1	—	—.187	— .982	+ .05	— .01

(Продолжение)

Дата	Час. уг. ⊙	β	δ	υ	ι	b	o	c	y	z	l	H—B
	ч м											
1841 V 9	6 35	—	—	1	—	—	—	—	—.152	+ .988	″00	0
	15 17	—	—	—	—	1	—	—	—.653	— .758	— .25	—0″12
	15 44	—	—	—	—	—	1	—	—.559	— .829	— .33	— .24
	16 48	—	—	—	—	—	—	1	—.309	— .951	— .11	— .02
24	5 36	—	—	1	—	—	—	—	+.104	+ .995	— .11	— .15
	11 17	—	—	—	1	—	—	—	—.982	+ .187	— .21	— .14
25	5 31	—	—	1	—	—	—	—	+.126	+ .992	+ .09	+ .05
	11 12	—	—	—	1	—	—	—	—.978	+ .208	— .45	— .38
27	19 45	1	—	—	—	—	—	—	+.442	— .897	+ .07	+ .02
	20 59	—	1	—	—	—	—	—	+.704	— .710	+ .33	+ .24
	5 23	—	—	1	—	—	—	—	+.161	+ .987	+ .15	+ .11
	11 4	—	—	—	1	—	—	—	—.970	+ .242	— .06	+ .01
29	19 37	1	—	—	—	—	—	—	+.411	— .912	+ .05	+ .07
	5 15	—	—	1	—	—	—	—	+.195	+ .981	+ .35	+ .30
	10 56	—	—	—	1	—	—	—	—.961	+ .276	— .12	— .06
30	5 11	—	—	1	—	—	—	—	+.212	+ .977	+ .05	0
	10 52	—	—	—	1	—	—	—	—.956	+ .292	+ .31	— .37
31	19 29	1	—	—	—	—	—	—	+.379	— .926	+ .26	+ .22
	20 43	—	1	—	—	—	—	—	+.653	— .758	+ .10	+ .02
	5 8	—	—	1	—	—	—	—	+.225	+ .974	+ .04	— .01
VI 15	18 27	1	—	—	—	—	—	—	+.118	— .993	— .32	— .32
	19 41	—	1	—	—	—	—	—	+.427	— .904	— .19	— .24
22	17 57	1	—	—	—	—	—	—	—.013	—1.000	— .14	— .12
	19 11	—	1	—	—	—	—	—	+.305	— .952	— .12	— .15
IX 28	21 21	—	—	1	—	—	—	—	+.769	— .639	— .01	— .09
	6 8	—	—	—	—	1	—	—	—.013	+1.000	— .52	— .52
X 3	11 24	1	—	—	—	—	—	—	—.988	+ .156	— .03	+ .09
	21 3	—	—	1	—	—	—	—	+.716	— .698	— .08	— .16
	6 12	—	—	—	—	—	1	—	—.052	+ .999	— .19	— .21
XI 1	9 35	1	—	—	—	—	—	—	—.806	+ .591	— .17	— .09
	19 14	—	—	1	—	—	—	—	+.317	— .948	— .09	— .11
	0 55	—	—	—	1	—	—	—	+.971	+ .238	+ .19	0
	4 23	—	—	—	—	—	1	—	+.411	+ .912	.00	— .08
	5 27	—	—	—	—	—	—	1	+.143	+ .990	— .09	— .11
2	9 31	1	—	—	—	—	—	—	—.796	+ .605	— .14	— .06
	10 45	—	1	—	—	—	—	—	—.947	+ .321	— .25	— .15
	0 51	—	—	—	1	—	—	—	+.975	+ .221	+ .07	— .12
	4 19	—	—	—	—	—	1	—	+.427	+ .904	— .15	— .23
	5 23	—	—	—	—	—	—	1	+.161	+ .987	— .29	— .31
8	3 45	—	—	—	—	—	1	—	+.556	+ .831	— .05	— .15
	4 59	—	—	—	—	—	—	1	+.263	+ .965	+ .05	+ .01

(Продолжение)

Дата	Час. уг. ⊙	β	δ	υ	ι	b	o	c	y	z	l	H—B
	ч м											
1841 XI 29	7 40	1	—	—	—	—	—	—	— .423	+.906	—0″.13	—0″.11
	8 54	—	1	—	—	—	—	—	— .688	+.725	— .33	— .27
XII 18	6 16	1	—	—	—	—	—	—	— .070	+.998	+ .07	+ .05
	7 30	—	1	—	—	—	—	—	— .383	+.924	+ .10	+ .11
	21 36	—	—	—	1	—	—	—	+ .809	—.588	+ .17	+ .02
	1 4	—	—	—	—	—	1	—	+ .961	+.276	— .08	— .22
1842 I 13	4 21	1	—	—	—	—	—	—	+ .419	+.908	— .13	— .22
	5 35	—	1	—	—	—	—	—	+ .109	+.994	+ .23	+ .17
	14 0	—	—	1	—	—	—	—	— .866	—.500	+ .09	+ .22
14	4 17	1	—	—	—	—	—	—	+ .434	+.901	+ .08	0
	5 31	—	1	—	—	—	—	—	+ .126	+.992	+ .06	0
	13 56	—	—	1	—	—	—	—	— .875	—.485	— .25	— .12
	23 5	—	—	—	—	—	1	—	+ .971	—.238	— .01	— .14
15	4 13	1	—	—	—	—	—	—	+ .450	+.893	+ .24	+ .15
	5 27	—	1	—	—	—	—	—	+ .143	+.990	+ .18	+ .12
	13 52	—	—	1	—	—	—	—	— .883	—.469	— .09	+ .04
	23 1	—	—	—	—	—	1	—	+ .967	—.255	+ .03	— .10
16	4 9	1	—	—	—	—	—	—	+ .466	+.885	— .08	— .17
	5 23	—	1	—	—	—	—	—	+ .161	+.987	— .05	— .11
	13 48	—	—	1	—	—	—	—	— .891	—.454	+ .09	+ .22
II 7	2 38	1	—	—	—	—	—	—	+ .772	+.636	+ .33	+ .20
	3 52	—	1	—	—	—	—	—	+ .530	+.848	+ .19	+ .08
17	1 58	1	—	—	—	—	—	—	+ .870	+.492	+ .14	0
	3 12	—	1	—	—	—	—	—	+ .669	+.743	+ .12	0
III 18	0 10	1	—	—	—	—	—	—	+ .999	+.044	+ .28	+ .14
	18 58	—	—	—	—	—	1	—	+ .250	—.968	+ .25	+ .23
IV 3	23 12	1	—	—	—	—	—	—	+ .978	—.208	+ .08	— .05
	17 33	—	—	—	—	1	—	—	— .118	—.993	— .11	— .04
13	22 35	1	—	—	—	—	—	—	+ .932	—.362	+ .31	+ .19
	23 49	—	1	—	—	—	—	—	+ .999	—.048	+ .46	+ .31
	17 23	—	—	—	—	—	1	—	— .161	—.987	— .01	+ .03
	18 27	—	—	—	—	—	—	1	+ .118	—.993	+ .12	+ .15
18	22 17	1	—	—	—	—	—	—	+ .901	—.434	+ .35	+ .23
	23 31	—	1	—	—	—	—	—	+ .992	—.126	+ .24	+ .10
	13 37	—	—	—	1	—	—	—	— .912	—.411	+ .12	+ .19
	17 5	—	—	—	—	—	1	—	— .238	—.971	+ .11	+ .16
	18 9	—	—	—	—	—	—	1	+ .039	—.999	— .03	+ .01
25	16 38	—	—	—	—	—	1	—	— .350	—.937	+ .26	+ .32
	17 42	—	—	—	—	—	—	1	— .078	—.997	+ .09	+ .15
V 13	6 20	—	—	1	—	—	—	—	— .087	+.996	+ .05	+ .04
	12 1	—	—	—	1	—	—	—	—1.000	—.004	+ .15	+ .23

(Продолжение)

Дата		Час. уг. ⊙	β	δ	υ	ι	b	o	c	y	z	l	П—В
		ч м											
1842	V 15	6 12	—	—	1	—	—	—	—	— .052	+ .999	0″.04	—0″.05
		11 53	—	—	—	1	—	—	—	—1.000	+ .031	+ .05	+ .13
	21	5 49	—	—	1	—	—	—	—	+ .048	+ .999	+ .03	
		11 30	—	—	—	1	—	—	—	— .991	+ .131	+ .13	+ .20
	30	19 33	1	—	—	—	—	—	—	+ .395	— .919	— .11	— .15
		5 12	—	—	1	—	—	—	—	+ .208	+ .978	— .02	— .07
	VI 5	19 9	1	—	—	—	—	—	—	+ .297	— .955	+ .06	+ .04
		20 23	—	1	—	—	—	—	—	+ .584	— .812	— .09	— .17
	22	17 58	1	—	—	—	—	—	—	— .009	—1.000	+ .22	+ .24
		19 12	—	1	—	—	—	—	—	+ .309	— .951	+ .22	+ .18
	23	17 54	1	—	—	—	—	—	—	— .026	—1.000	— .03	— .01
		19 8	—	1	—	—	—	—	—	+ .292	— .956	— .03	— .06
	X 12	10 51	1	—	—	—	—	—	—	— .955	+ .297	— .17	— .06
		12 5	—	1	—	—	—	—	—	—1.000	— .022	— .09	+ .03
		5 39	—	—	—	—	—	1	—	+ .092	+ .996	+ .12	+ .08
		6 43	—	—	—	—	—	—	1	— .187	+ .982	— .01	+ .01
	13	10 48	1	—	—	—	—	—	—	— .951	+ .309	— .45	— .34
		11 2	—	1	—	—	—	—	—	— .968	+ .250	— .52	— .41
		5 36	—	—	—	—	—	1	—	+ .105	+ .995	— .20	— .24
		6 40	—	—	—	—	—	—	1	— .174	+ .985	— .23	— .21
	16	10 37	1	—	—	—	—	—	—	— .935	+ .354	+ .03	+ .14
		11 51	—	1	—	—	—	—	—	— .999	+ .039	— .13	— .02
		20 16	—	—	1	—	—	—	—	+ .559	— .829	+ .08	+ .03
		5 25	—	—	—	—	—	1	—	+ .152	+ .988	— .19	— .24
	17	5 21	—	—	—	—	—	1	—	+ .169	+ .986	+ .21	+ .16
		6 25	—	—	—	—	—	—	1	— .109	+ .994	+ .09	+ .06
	21	10 18	1	—	—	—	—	—	—	— .903	+ .431	— .14	— .04
		11 32	—	1	—	—	—	—	—	— .993	+ .122	— .06	+ .05
	23	10 11	1	—	—	—	—	—	—	— .889	+ .458	— .26	— .16
		11 25	—	1	—	—	—	—	—	— .988	+ .152	— .40	— .29
		19 50	—	—		—	—	—	—	+ .462	— .887	— .03	— .07
	XII 6	7 11	1	—	—	—	—	—	—	— .305	+ .952	+ .20	+ .21
		8 25	—	1	—	—	—	—	—	— .591	+ .806	+ .30	+ .34
	17	6 22	1	—	—	—	—	—	—	— .096	+ .995	+ .01	— .01
		7 36	—	1	—	—	—	—	—	— .407	+ .914	+ .11	+ .12
											Сумма квадратов:	5.4067	4.3933

Таблица 3

Распределение наблюдений по часам суток

Час суток от полудня	Звезды							Сумма
	β	δ	υ	ι	b	o	c	
0	1	2	—	—	—	—	—	3
1	—	—	—	4	—	1	—	5
2	1	—	—	—	—	—	—	1
3	1	1	—	—	—	—	—	2
4	4	1	—	—	—	3	—	8
5	—	2	5	4	—	2	4	17
6	2	2	5	—	6	7	2	24
7	1	—	1	—	—	2	2	6
8	1	3	1	—	4	—	—	9
9	—	1	1	—	—	—	—	2
10	4	—	—	—	—	—	—	4
11	4	3	—	5	—	—	—	12
12	—	3	—	3	—	—	—	6
13	—	—	—	—	—	—	—	—
14	—	—	4	1	—	—	—	5
15	—	—	—	—	1	—	—	1
16	—	—	—	1	—	1	—	2
17	—	—	—	1	1	4	1	7
18	4	—	—	—	1	1	3	9
19	2	3	4	—	1	1	1	12
20	3	2	2	—	—	—	—	7
21	—	2	5	—	1	1	—	9
22	1	—	—	1	—	—	—	2
23	2	—	—	—	—	2	—	4
Сумма.	31	25	28	20	25	25	13	157

Таблица 4

Нормальные уравнения

β	δ	υ	ι	b	o	c	y	z	l	s
31	.	.	.	.	.	.	+ 1.0980	+ 2.2050	+0".4800	+ 34.7830
	25	.	.	.	.	.	— 0.9610	+ 3.5680	+0.3800	+ 27.9870
		28	.	.	.	.	+ 2.1220	+ 1.5290	+0.2500	+ 31.9010
			20	.	.	.	— 3.9090	+ 3.3710	+0.6700	+ 20.1320
				15	.	.	— 2.8980	+ 6.6800	—0.6100	+ 18.1730
					25	.	+ 3.6730	+ 5.9430	+0.8100	+ 35.4260
						13	+ 0.4490	+ 2.9960	—0.1700	+ 16.2750
							+52.8583	— 8.8944	+6.6204	+ 50.1561
								+104.1473	+1.3535	+122.8900

§ 8. Формула суточной солнечной волны.

Полученные здесь выводы для неизвестных относятся к склонениям звезд: так построены уравнения у В. Струве в «Sur le coefficient constant dans l'aberration des étoiles fixes...», 1843 г. Если же отнести эти результаты к зенитным расстояниям или к широте $\varphi = \delta + z$, как это во всех моих работах, то мы должны считать знаки у неизвестных обратными. Имея в отношении к зенитрасстояниям

$$(7) \qquad \begin{aligned} y &= -0.13177 \\ z &= -0.02366 \end{aligned}$$

и по (3)

$$(8) \qquad \tan\nu = \frac{z}{y} = +0.17956,\ \nu = -12^{\text{ч}}40^{\text{м}}7,$$

получаем такое выражение для суточной солнечной волны колебаний широты φ по наблюдениям В. Струве 1840—1842 гг. в Пулкове:

$$(9) \qquad \Delta\varphi = 0''134 \cos(\sigma - 12^{\text{ч}}68) \text{ из 157 уравнений.} \\ \pm 28 \qquad\qquad \pm 78$$

Вычисление средних ошибок значений амплитуды и фазы мы выполнили, считая, что неизвестные связаны общей функциональной зависимостью.

Из моих наблюдений 1918—1928 гг. по разностям зенитных расстояний звезд β Кассиопеи и ι Дракона, следовательно, методом совсем другим и из очень малой части всего собранного мною материала получилось (вычисления выполнены Н. И. Васильевой и мною):

$$(10) \qquad \Delta\varphi = 0''161 \cos(\sigma - 11^{\text{ч}}45) \text{ из 371 уравнения.} \\ \pm 23 \qquad\qquad \pm 55$$

Подробности этого последнего вывода мы сообщаем в особой статье.[1]

§ 9. Суточный период не возникает ли из несовершенств инструмента?

Если вывод, у нас получившийся, рассматривать только как формулу интерполяционную и притом только для наблюдений В. Струве, то и в таком случае он является достижением весьма ценным, много обещающим. Амплитуда в 0″13 суточного колебания, ведь, не может оставаться без следов на выводах из наблюдений, хотя бы, например, на том знаменитом значении $k = 20''445$ постоянной астрономической аберрации, которое получилось из вычислений у самого В. Струве. Ведь, В. Струве сам искал в своих

[1] А. С. Васильев. Суточная солнечная волна колебаний широты места по разностям зенитных расстояний звезд β Кассиопеи и ι Дракона, наблюденным А. С. Васильевым в 1918—1928 гг. в Пулкове (будет напечатано в одной из следующих книг Известий Акад. Наук).

наблюдениях суточное явление, но предполагал его или в ходе часов, служивших в наблюдениях, или в переменах азимута инструмента. Вот одно место из его работы 1853.[1]: «Так как зенитное расстояние звезды определяется временем между двумя соответствующими прохождениями, временем, указываемым часами, то отсюда следует, что, если действительный ход часов отличается от среднего суточного, получаемого путем наблюдений в последовательные дни, то возникает ошибка, действующая различно на результаты, полученные по разным звездам. То же самое происходит, если основание инструмента не неизменно, а имеет суточный период, возникающий из перемен температуры, или, выражаясь яснее, если между двумя соответствующими прохождениями азимут оси вращения изменяется.

К счастью эти две искажающие причины оказывают только минимальное влияние на определяемые зенитные расстояния. Но как, все-таки, доказать, что это влияние не изменяет найденного значения аберрации на несколько сотых секунды? — Что касается перемены азимута, то мы имеем прямое доказательство: перемен азимута в нашем инструменте не существует. В самом деле, инструмент сохранял в 1840 и 1841 гг. один и тот же азимут оси вращения в течение годового периода с таким постоянством, что разность азимутов, определенных в январе и в июле, была совершенно неоценимой, несмотря на разницу в 30° Реомюра между средними температурами обоих месяцев». Это заключение об азимуте находим и в более ранних работах В. Струве, например, в 1842 г.: «Азимут, когда его не трогают, остается неизменным в течение всего года в пределах секунды дуги»... «Неточность склонений, определяемых на инструменте со стороны азимута, может быть, никогда не достигает 0.01 секунды дуги»... Там же приведена и таблица значений азимута в 1840 и 1841 гг.: в июле и августе $5''.9$, в октябре и ноябре $6''.0$, в январе, феврале и марте $4''.4$, в апреле и мае $5''.3$, в июне и июле $3''.6$.[2]

§ 10. Суточная солнечная волна не возникает ли из перемен азимута инструмента?

Ввиду исторической роли, которую азимут инструмента совершенно случайно уже после В. Струве сыграл в прошедшем (см. § 4), возможно, что возникновение наших выводов (9) и (10) будут пытаться неправильно объяснять переменами азимута. Необходимо здесь об азимуте сказать подробнее.

В 1870 г. от 22 марта по 10 апреля в пять различных суток М. О. Нюрен произвел 20 специальных определений азимута инструмента по звездам, различно удаленным от зенита в меридиане до 15°. Были приняты во внимание все предосторожности в отношении поправок часов и в отношении прямых восхо-

[1] W. Struve. Récueil de mémoires présentés à l'Académie des Sciences par l'astronomes de Poulkovo. St. Pétersbourg, 1853, стр. X.

[2] W. Struve. Notice sur l'instrument des passages de Repsold, établi à l'observatoire de Poulkovo dans le premier vertical, p. 12 (извлечение из Bulletin scientifique publié par l'Académie des Sciences de St-Pétersbourg, т. X, №№ 14, 15, 16). См. еще и Astr. Nachr., № 468, стр. 214, 1843.

жденпй звезд. Получившиеся значения азимута опубликованы в III томе Пулковских Observations на стр. 195—196. Вот вывод самого Нюрена из этих его наблюдений: «Принимая во внимание, что наблюдения простираются на все часы суток от 9 часов утра до полуночи, мы имеем доказательство, что сейчас в азимутах не существует никакого суточного периода. Доказательство это тем более убедительно, что в эти дни температура изменялась больше, чем на 10° Р. от полудня до полуночи».

В 1883 году в «L'Aberration des étoiles fixes, на стр. 7—9 М. О. Нюрен, на основании наблюдения двух мир, построенных в 1877 г. к востоку и западу от инструмента, составил таблицу смещений азимута, различных в отдельных месяцах, но направленных всегда по часовой стрелке. Однако, ни самому Нюрену, ни всем последующим наблюдателям не удалось, несмотря на бесконечное количество произведенных с того времени отсчетов мир (отсчеты, произведенные с 1877 г. до 1896 г., опубликованы в X томе «Publications de Poulkovo», 1903 г.), установить в переменах азимута никакой периодичности. В 1908 году, приготовляя инструмент к моим наблюдениям, я открыл, что смещения азимута, получавшиеся с 1877 года, возникают из несовершенной выверки инструмента, установившейся при Нюрене. После весьма обстоятельного исследования этого факта, я несовершенство выверки инструмента в апреле 1908 г. устранил (см. § 4); с того времени установилось постоянство азимута, каковым оно было — это доказано выше — при В. Струве и после В. Струве до апреля 1870 г. Подробности об этом историческом промахе в выверке инструмента мною опубликованы в 1928 г.[1] в двух специальных исследованиях (см. выше, § 4). Для исследования постоянства азимута мною собраны путем наблюдений материалы несравненно более обширные и лучше сорганизованные, чем у М. О. Нюрена, однако, для вычисления их мы не располагаем средствами.

§ 11. Метод составления средних по отдельным часам.

К применению двух прекрасных методов (9) и (10) выделения кратковременных периодических колебаний широты места мы пришли длинным путем изучения результатов наблюдений. Только постепенно мы пришли к убеждению, что обычно получающаяся средняя ошибка одного наблюденного возле зенита зенитного расстояния $\pm 0''\!.20$ доводится до такого размера не инструментом, а атмосферою.[2] Такого размера средняя ошибка в зените в Пулкове получается

[1] К печати были представлены в 1926 г.: а) А. С. Васильев. Нереальная оценка точности нивелирований горизонтальной оси в пассажных инструментах. Изв Акад. Наук СССР, 1928, №№ 2, 3, 4 и 5. б) А. С. Васильев. Условия надежного нивелирования горизонтальной оси в пассажных инструментах. Там же, №№ 4 и 5.

[2] В 1909 г.: А. С. Васильев. Приспособление для увеличения точности отсчетов уровней. Изв. Акад. Наук, 1909, № 12. В 1917 г.: А. С. Васильев. Пассажный инструмент в первом вертикале и зенит-телескоп в результатах наблюдений широты места. Изв. Акад. Наук, 1917, №№ 13 и 14. стр. 1176—1177. В 1932 г.: А. С. Васильев. Зенитные расстояния, получаемые на Пулковском пассажном инструменте в первом вертикале. Изв. Акад. Наук СССР, 1932, № 2, стр. 200—201.

и на пассажном инструменте в первом вертикале и на зенит-телескопе (звезда δ Кассиопеи и три других, наблюдавшиеся Л. И. Семеновым) и на вертикальном круге. В 1912—1913 гг. мы придерживались обычного тогда взгляда,— считали среднюю ошибку $\pm 0''20$ возникающей из инструмента. Поэтому тогда, в 1913—1914 гг., для выявления колебаний широты места суточных мы применяли метод составления средних, чтобы парализовать влияние ошибок, которые считали случайными.

Распределивши наблюденные значения широты по часовым углам соответственного светила, Солнца или Луны, мы составили средние для каждого часа специального времени и обработали такие ежечасные средние по формуле Бесселя с четырьмя членами (гармонический анализ). Из моих наблюдений 1908,6—1911,5 гг. у нас (вычисляли Н. И. Васильева и я) получилось таким методом тогда, в 1913 году, для суточной солнечной волны

(11) $\Delta\varphi = 0''033 \cos(\sigma - 14^{ч}1)$ из 1482 наблюдений.

Мы проработали тогда в этом же направлении и наблюдения δ Кассиопеи на зенит-телескопе в Пулкове, получивши такой же приблизительно вывод, но опубликовать о результатах этой большой работы по независящим обстоятельствам мы имели возможность только один-два десятка строк в 1914 г.[1] С 1917 г. обстановка изменилась, но мы предпочли опубликовать выводы дальнейшие,[2] а неопубликованные прежние совершенствовать. В 1917 г. удалось начать новый ряд наблюдений в первом вертикале.

С нашим выражением (11) сходны и выводы, полученные по тому же методу составления средних и опубликованные в 1932 году А. Д. Дроздом.[3]

Это, во-первых, вывод аспиранта П. П. Логинова из наблюдений β Кассиопеи 1918—1929,5 гг., произведенных мною в первом вертикале и мною же ему сообщенных в окончательном вычислении в виде зенитных расстояний, уже приведенных к эпохе 1925,0 г.

(12) $$\Delta\varphi = \underset{\pm 12}{0''053} \cos(\sigma - \underset{\pm 34}{15^{ч}25}),$$

и затем

(13) $\Delta\varphi = 0''037 \cos(\sigma - 16^{ч}8)$ — исследования А. Д. Дрозда по зенитным расстояниям δ Кассиопеи на зенит-телескопе,

[1] А. С. Васильев. Сравнение результатов наблюдений над широтою в 1908—1911 гг. в Пулкове пассажным инструментом в первом вертикале параллельно с зенит-телескопом. Изв. Акад. Наук, 1916, № 16, стр. 1602, 1614.

[2] А. С. Васильев. Притягательные действия Луны и Солнца на земную атмосферу и эллипсоидальность ее формы в наблюдениях астрономических. Циркуляр Главной Обсерватории в Пулкове, 1917, № 28. А. С. Васильев. Влияние формы и приливов земной атмосферы на зенитные расстояния светил. Изв. Росс. Акад. Наук, 1919.

[3] Poulkovo Observatory Circular, № 5, стр. 12.

и

(14) $\Delta\varphi = 0.046 \cos(\sigma - 15^h\!.2)$ — исследования Н. В. Циммермана,[1] по звездным парам, наблюденным на зенит-телескопе.

Если эти четыре выражения: (11), (12), (13) и (14) мы признаем сходными с нашими (9) и (10), сходными по фазе, то амплитуды в них очень малы сравнительно с амплитудой в (9) и (10). Причина этого в несовершенстве метода, которым получены выражения (11), (12), (13) и (14). В этом методе на размер среднего арифметического повлияли волны колебаний периодов более длинных, чем сутки. Возможность такого влияния в нашем выражении (10) совершенно исключена, а в выражении (9) это влияние отходит в остаточные ошибки.

§ 12. **Опыт Р. Шуманна выявления суточной волны в колебаниях широты места.**

Раньше нас опыт выявления колебаний широты суточного периода был сделан Р. Шуманном[2] из наблюдений В. Струве 1840—1842 гг. Из всех наблюдений В. Струве, каковых оказалось всего 298, Шуманн построил шесть эмпирических формул типа

(15) $$\varphi - \varphi_0 = A + C$$

соответственно наблюдавшимся звездам: 1) β Кассиопеи — 37 наблюдений, 2) δ Кассиопеи — 49, 3) υ Б. Медведицы — 77, 4) ι Дракона — 61, 5) ο Дракона — 42 и 6) обобщенно для звезд 39 *b* Дракона, ο Дракона, *P* XIX 371, = = 24 + 42 + 14 наблюдений.

В формуле (15) *A* означает годовую волну колебаний широты, а *C* — волну $14^1/_2$ месячную, причем период последней был Шуманном принят в 438,5 дней.

Для составления каждой из этих формул потребовалось определить значения пяти неизвестных параметров. Значения этих параметров получились с отчетливо заметным ходом по прямому восхождению звезд. Ход по часам прямого восхождения звезд получился особенно отчетливым в фазах, в фазах волн годовой и $14^1/_2$ месячной.

Это дало повод Шуманну предположить, что и годовая и $14^1/_2$ месячная волны в колебаниях широты есть явление только кажущееся, что в действительности существуют колебания только суточные. Впечатление же колебаний широты длительных получается, по его мнению, на фоне возможности наблюдать каждую звезду только один раз в сутки. Руководясь этой гипотезой,

[1] Труды Главной Астрономической обсерватории в Пулкове, серия II, т. XXXVI, 1930, стр. 59.

[2] R. Schumann. Numerische Untersuchungen über Polhöhenschwankungen und Aberrationsconstante, § 8. Astronomishe Abhandlungen, als Ergänzungshefte zu der Astr. Nachr., № 11, 1906.

Шуманн вычислил на каждый 20-й день 1840—1842 гг. по шести значений ординат, даваемых его шестью формулами. Соединяя линией на графике концы ординат, соответствующих одной и той же звезде, Шуманн имел изображение длительных колебаний широты, даваемых наблюдениями этой звезды. Соединивши прямо рукою концы шести ординат одного дня, соответственно последовательности наблюдаемых звезд, Шуманн получил графики суточных колебаний; они представлены на диаграмме II в его статье.

На графиках Шуманна мы видим амплитуды суточного колебания в разные периоды года различными; амплитуды неодинаковы и в одинаковые сезоны двух различных годов. Размер амплитуд заключен между $0''.25$ и $0''.08$. Что касается фазы колебаний, то она у Шуманна выражена менее четко, чем у нас, и во всяком случае от нашей она отличается на 12 часов. Изучение текста статьи Шуманна показывает, что, хотя диаграмма его и озаглавлена «Суточные колебания широты», в действительности на диаграмме показаны суточные колебания не широты, а склонений. Шуманн свои интерполяционные формулы вывел из уравнений В. Струве, а эти уравнения построены у В. Струве для склонений.

§ 13. Заключение.

Детальное изучение суточных графиков Шуманна и сравнение их (при указанной выше необходимости изменять знак на обратный) с нашими формулами (9) и (10) показывает, что и наши формулы и графики Р. Шуманна представляют одно и то же явление — суточные колебания широты, но представляют различно. В выражениях (9) и (10) мы имеем полную достоверность того, что в колебаниях широты существует суточная солнечная волна с амплитудой в $0''.16$—$0''.13$ и, кроме этого, возможны другие колебания и длительных периодов и коротких. Графики Шуманна представляют, что колебания широты, обычно принимаемые в виде волны годовой и $14^1/_2$ месячной, могут быть рассматриваемы как результат колебаний только суточных и притом с амплитудой, изменяющейся так, что в целом создается впечатление волны $14^1/_2$ месячной.

Мы думаем, что в действительности это не так, потому что в существующей реально обстановке наблюдений всякое длительное колебание можно заменить суточным, подобравши для изменений его амплитуды надлежащую закономерность. Увеличенная фаза в выражениях (11) и (12) сравнительно с выражениями (9) и (10) указывает на реальное существование колебаний широты длительных; сходство (11) и (12) с (13) и (14) указывает на то, что выявленное суточное колебание не есть свойство только пассажного инструмента в первом вертикале, но и свойство зенит-телескопа, в котором и метод наблюдений и эпоха наблюдений (с 1904 г.) совсем иные, чем у В. Струве в 1840—1842 гг. на пассажном инструменте.

Кроме изложенного, настоящее исследование, по нашему мнению, ставит окончательный предел: 1) суждениям, что пассажный инструмент в первом вертикале в Пулкове, построенный Репсольдом, есть будто бы инструмент, «плохо построенный и неудачно поставленный»,[1] и 2) суждениям о необходимости переноса этого или каких-либо других инструментов обсерватории на какое-то иное место.

Выполненным мною наблюдениям 1908,6—1911,5, гг. и с 1917 г. до настоящего времени мною дана такая организация, что все эти вопросы и многие другие, здесь не затронутые, уже давно могли бы быть разрешены, но на нашу работу с 1920 г. уделяется слишком ограниченная помощь в вычислениях. В 1930—1932 гг. она была несколько большей, и мы имеем ценные выводы. После 1929,5 г. наблюдения остаются полностью не вычисленными.

21 февраля 1934 г.
Пулково.

A. VASSILIEV. L'ONDE SOLAIRE DIURNE DANS LES OSCILLATIONS DE LA LATITUDE DE POULKOVO D'APRÈS LES OBSERVATIONS DE 1840—1842 DE STRUVE

RÉSUMÉ

A l'aide de nos observations faites en 1908,6—1911,5 à Poulkovo, avec un instrument de passage etabli dans le premièr vertical nous avons découvert en 1910 l'existence d'oscillations de la latitude de courte durée. D'après la méthode de la formation des moyennes prises pour chaque angle horaire, nous avons obtenu, par exemple, déjà en 1913, telle expression de l'onde solaire diurne dans les oscillations de latitude.

$$\Delta\varphi = 0''033 \cos(\sigma - 14^h\!\cdot\!1) \text{ de 1482 observations.}$$

Nous avons trouvé dernièrement des méthodes meilleures pour la démonstration des oscillations de courte durée régulières.. Nous établissons et nous résolvons — d'après une de ces méthodes — des équations pour les distances zénithales, séparées par un espace de temps moindre que 24 heures.

Nous avons appliqué cette méthode experimentalement à celles des observations de 1840—1842 de W. Struve (faites avec un instrument de passage établi dans le premièr vertical), qui furent observées plus d'une fois à certains jours.

Nous avons obtenu pour l'onde solaire diurne

$$\Delta\varphi = 0''134 \cos(\sigma - 12^h\!\cdot\!7) \text{ moyenne de 157 observations.}$$
$$\pm\ 28 \qquad\qquad \pm 8$$

Nous nous attendons à obtenir de l'application de cette méthode à nos observations plus nombreuses et plus densément reparties des résultats non moins intérressants.

[1] См. Отчеты Пулковской обсерватории за 1901—1902 гг., стр. 16, за 1902—1904 гг., стр. 16—17; А. С. Васильев. 70 лет истории Пулковского пассажного инструмента в первом вертикале, § 12. Изв. Русск. Астроном. общ. 1912, №№ 9 и 10.

Les calculations ne sont pas encore parachevées.

R. Schumann en 1906 s'est servi de toutes les 298 observations de V. Struve et ayant employé une toute autre méthode, plus compliquée, pour la calculation de sept formules d'interpolation a obtenu des diagrammes d'oscillations diurnes moins précis, mais pareils à notre résultat des 157 observations.

24 Fevrier 1934

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЕГО ОСИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ „ОБЪЕМНЫХ" И ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ

Г. Д. ГРОДСКОГО

(*Представлено академиком* **А. Н. Крыловым**)

1. В этом случае все перемещения и напряжения в таком теле не будут зависеть от долготы ψ; поэтому, вводя полуполярные координаты

$$r,\ \psi,\ z,$$

полярная ось OZ коих совпадает с осью вращения тела, будем иметь следующие выражения напряжений:

$$R_r = A\left(\frac{\mu}{1-2\mu}\theta + \frac{\partial h}{\partial r}\right), \quad K_k = A\left(\frac{\mu}{1-2\mu}\theta + \frac{h}{r}\right),$$
$$Z_r = A\left(\frac{\mu}{1-2\mu}\theta + \frac{\partial w}{\partial r}\right) \tag{1}$$

и

$$R_z = Z_r = \frac{A}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \quad Z_k = K_z = \frac{A}{2}\frac{}{\partial z},$$
$$K_r = R_k = \frac{A}{2} r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k}{r}\right); \tag{2}$$

где h и w — перемещения частицы $M(r, \psi, z)$ вдоль ея радиуса-вектора и параллельно оси OZ, а θ — так наз. «кубическое расширение», причем

$$\theta = \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{h}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}; \tag{3}$$

кроме того

$$A = \frac{E}{1+\mu}. \tag{4}$$

Подстановка этих выражений во второе из уравнений равновесия Теории Упругости: *

$$\frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{R_r - K_k}{r} + \frac{\partial R_r}{\partial r} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial R_k}{\partial r} + \frac{2}{r} R_k + \frac{\partial Z_k}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

и

$$\frac{\partial R_z}{\partial r} + \frac{1}{r} R_z + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

даст:

$$\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial k}{\partial r} - \frac{k}{r^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} = 0, \tag{8}$$

так что кручение k в этих обстоятельствах не зависит от перемещений h и w. Ясно, что и обратно — перемещения h и w не зависят от кручения k, ибо уравнения (5) и (7) содержат лишь напряжения

$$R_r,\ K_k,\ Z_z \text{ и } R_r,$$

выражения (1) и (2) коих не включают k.

Интегрирование уравнения (8) легко совершается под видом бесконечного ряда из Бесселево-гиперболических членов, поэтому приведя лишь нижеследующее выражение его общего интеграла, займемся дальше интегрированием уравнений (5) и (7).

Выражение кручения

$$k = arz + br + \frac{cz+f}{r} + \sum_{i=1}^{\infty} [A_i J_1(m_i r) + B_i Y_1(m_i r)] \cos h(m_i z) + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} [C_i J_1(n_i r) + D_i Y_1(n_i r)] \sin h(n_i z), \tag{9}$$

причем

$$J_0(x) \equiv 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\,i!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i} \tag{10}$$

$$\pi Y_0(x) \equiv 2\left(C + \lg\frac{x}{2}\right) J_0(x) - 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\,i!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i} \tag{11}$$

и

$$J_1(x) \equiv -J_0'(x), \quad Y_1(x) \equiv -Y_0'(x). \tag{12}$$

* Мы опускаем члены, выражающие «объемные» силы, так как в другой моей статье показано, что это можно сделать даже при изучении равновесия любого упругого тела.

2. Уравнение (8) дает:

$$\frac{\partial (rR_z)}{\partial r} + \frac{\partial (rZ_z)}{\partial z} = 0,$$

откуда следует, что

$$rR_z \equiv -\frac{\partial U(r, z)}{\partial z}, \quad rZ_z \equiv \frac{\partial U(r, z)}{\partial r}, \tag{13}$$

где $U(r, z)$ — какая-то, пока произвольная, но дальше подлежащая определению, функция своих аргументов.

Для упрощения дальнейшего письма положим:

$$U(r, z) \equiv Ar\frac{\partial V(r, z)}{\partial r}, \tag{14}$$

тогда вместо (13) получим:

$$R_z \equiv A\frac{\partial^2 V(r, z)}{\partial r\,\partial z}, \quad Z_z \equiv A\left[\frac{\partial^2 V(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V(r, z)}{\partial r}\right]; \tag{15}$$

после этого уравнение (5), вследствие еще выражений (1) и (2), дает:

$$\frac{\partial R_r}{\partial r} + A\left(\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} - \frac{h}{r^2}\right) - A\frac{\partial^3 V}{\partial r\,\partial z^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[R_r + A\frac{h}{r} - A\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] = 0,$$

откуда, интегрируя по r, выводим:

$$R_r + A\frac{h}{r} - A\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{16}$$

где произвольную функцию одного z'а, которая должна бы появиться при этом интегрировании, можем считать включенною в состав функции

$$V(r, z),$$

так как присоединение к ней подобного члена не меняет, очевидно, выражения функции

$$U(r, z),$$

а следедовательно, и выражений напряжений

$$R_z \quad \text{и} \quad Z_z,$$

определяемых равенствами (13).

Равенства (15) и (16) дают:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\equiv\frac{Zz}{A}=\frac{\mu}{1-2\mu}\theta+\frac{}{\partial z}=\frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{h}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial w}{\partial z}$$

и

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{h}{r}\equiv\frac{Rr}{A}=\frac{\mu}{1-2\mu}\theta+\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{h}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial h}{\partial r}$$

или

$$\frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{h}{r}\right)+\frac{1-\mu}{1-2\mu}\frac{}{\partial z}\equiv\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

и

$$\frac{1-\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{h}{r}\right)+\frac{\mu}{1-2\mu}\frac{\partial w}{\partial z}\equiv\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

откуда находим, что

$$\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{h}{r}\equiv(1-\mu)\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\mu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right) \tag{17}$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial z}\equiv-\mu\frac{\partial^2 V}{o z^2}+(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right). \tag{18}$$

Для облегчения дальнейшего интегрирования положим

$$v(r, z)\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial^2\omega(r, z)}{\partial r\,\partial z};$$

тогда

$$\frac{\partial V}{\partial r}\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial^3\omega}{\partial r^2\,\partial z}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial^4\omega}{\partial r^3\,\partial z}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^3\omega}{\partial r\,\partial z}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial z}$$

и

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial^4\omega}{\partial r\,\partial z^3},$$

почему уравнения (17) и (18) превратятся в такие:

$$\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{h}{r}\equiv\frac{1-\mu}{r}\frac{\partial^4\omega}{\partial r\,\partial z^3}-\frac{\mu}{r}\left[\frac{\partial^4\omega}{\partial r^3\,\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3\omega}{\partial r^2\,\partial z}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial z}\right]$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial z}\equiv-\frac{\mu}{r}\frac{\partial^4\omega}{\partial r\,\partial z^3}+\frac{1-\mu}{r}\left[\frac{\partial^4\omega}{\partial r^3\,\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3\omega}{\partial r^2\,\partial z}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial z}\right]$$

или

$$\frac{\partial(rh)}{\partial r}\equiv(1-\mu)\frac{\partial^4\omega}{\partial r\,\partial z^3}-\mu\left[\frac{\partial^4\omega}{\partial r^3\,\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3\omega}{\partial r^2\,\partial z}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial z}\right]$$

и

$$\frac{\partial(rw)}{\partial z}\equiv-\mu\frac{\partial^4\omega}{\partial r\,\partial z^3}+(1-\mu)\left[\frac{\partial^4\omega}{\partial r^3\,\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3\omega}{\partial r^2\,\partial z}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial z}\right];$$

интегрируя первое из этих уравнений по r, а второе — по z, получим:

$$rh \equiv (1-\mu)\frac{\partial^3 \omega}{\partial z^3} - \mu\left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial z}\right) \tag{19}$$

и

$$rw \equiv -\mu\frac{\partial^3 \omega}{\partial r \partial z^2} + (1-\mu)\left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial r^3} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right). \tag{20}$$

причем произвольную функцию одного z' а в выражении (19) для rh и подобную функцию одного r' а в выражении (20) для rw можем считать скрытыми в самой функции $\omega(r, z)$, ибо присоединение к ней таких слагаемых не изменит, очевидно, состава функции $V(r, z)$, а следовательно и найденных ранее выражений для напряжений.

3. Выведенные выражения (19) и (20) для перемещений h и w можно переписать в более компактном виде, а именно:

$$h \equiv \frac{1-\mu}{r}\frac{\partial^3 \omega}{\partial z^3} - \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial z}\right) \tag{21}$$

и

$$w \equiv -\frac{\mu}{r}\frac{\partial^3 \omega}{\partial r \partial z^2} + \frac{1-\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)\right]; \tag{22}$$

выражения же (15) и (16) для напряжений превратятся в следующие

$$R_r \equiv A\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right]\right\}, \tag{23}$$

$$R_z \equiv -A\frac{\partial^3}{\partial r \partial z^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) \tag{24}$$

и

$$Z_z \equiv \frac{A}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)\right]; \tag{25}$$

кроме того равенство (3) дает:

$$\theta \equiv \frac{1-2\mu}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}\left\{r\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right]\right\}, \tag{26}$$

после чего, на основании второго из равенств (1), еще выводим, что

$$K_k \equiv A\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right]\right\}. \tag{27}$$

4. Для вывода уравнения, которому подчинена сама функция

$$\omega(r, z),$$

нам послужит первое из уравнений (2); именно, по подстановке в него выражений (24), (21) и (22) и сократив на

$$\frac{1-\mu}{2}A,$$

получаем:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{1}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\right]\right\}+2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3\omega}{\partial r\,\partial z^2}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^4\omega}{\partial z^4}=0 \tag{28}$$

или

$$\frac{\partial^4\omega}{\partial r^4}+2\frac{\partial^4\omega}{\partial r^2\,\partial z^2}+\frac{\partial^4\omega}{\partial z^4}-\frac{2}{r}\left(\frac{\partial^3\omega}{\partial r^3}+\frac{\partial^3\omega}{\partial r\,\partial z^2}\right)+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}-\frac{3}{r^3}\frac{\partial\omega}{\partial r}=0. \tag{29}$$

Интегрирование его приводится к двукратному последовательному интегрированию уравнений, подобных уравнению Лапласа и отличающихся от него лишь знаком среднего члена. Действительно, если положим:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\equiv\varphi(r,\,z), \tag{30}$$

то будем иметь:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\equiv\varphi(r,\,z)-r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right), \tag{31}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^3\omega}{\partial r\,\partial z^2}\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^3\omega}{\partial r\,\partial z^2}\right]\equiv\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{1}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\right]\right\}$$

и

$$\frac{\partial^4\omega}{\partial z^4}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right)\right]$$

или, на основании (31):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^4\omega}{\partial z^4}\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\right]\right\};$$

подставляя эти выражения в уравнение (28), получим

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0$$

или

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0; \tag{32}$$

уравнение же (30) можем переписать так:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=\varphi(r,\,z). \tag{33}$$

При этом из выражения (26) вытекает еще, что

$$\theta\equiv\frac{1-2\mu}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z}, \tag{34}$$

откуда легко вывести, что «кубическое расширение» θ удовлетворяет уравнению Лапласа; действительно, уравнение (32) можем написать так:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0,$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial\Phi(r,z)}{\partial z};\quad \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{\partial\Phi(r,z)}{\partial r}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=r\frac{\partial\Phi}{\partial z},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-r\frac{\partial\Phi}{\partial r};$$

а потому

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z}=r\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial r}=-r\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial r}.$$

так что

$$r\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=-r\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

или

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0;$$

а так как

$$\theta=(1-2\mu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

то, следовательно, и

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\theta}{dz^2}=0.$$

5. Для интегрирования уравнения (29) положим:

$$\omega(r,z)=R(r)\cdot Z(z);$$

подстановка даст:

$$R^{IV}\cdot Z+2R''Z''+RZ^{IV}-\frac{2}{r}(R'''Z+R'Z'')+\frac{3}{r^2}R''Z-\frac{3}{r^3}R'Z=0$$

или

$$\frac{R^{IV}}{R}-\frac{2}{r}\frac{R'''}{R}+\frac{3}{r^2}\frac{R''}{R}-\frac{3}{r^3}\frac{R'}{R}=-2\left(\frac{R''}{R}-\frac{1}{r}\frac{R'}{R}\right)\frac{Z''}{Z}-\frac{Z^{IV}}{Z},$$

откуда следует, что выражение в правой части не зависит от Z, так что

$$2\left(\frac{R''}{R}-\frac{1}{r}\frac{R'}{R}\right)\left(\frac{Z''}{Z}\right)'-\left(\frac{Z^{IV}}{Z}\right)'=0$$

или

$$2\left(\frac{R''}{R}-\frac{1}{r}\frac{R'}{R}\right)=-\frac{\left(\frac{Z^{IV}}{Z}\right)'}{\left(\frac{Z''}{Z}\right)'};$$

здесь в свою очередь выражение в правой части не должно зависеть от z, а в левой — от r, т. е. общая величина того и другого есть число постоянное, напр.,

$$-2m^2,$$

так что

$$\left[\frac{Z^{\mathrm{IV}}(r)}{Z(r)}\right]'_z \equiv 2m^2\left[\frac{Z''(r)}{Z(r)}\right]'_z$$

и, следовательно,

$$\frac{Z^{\mathrm{IV}}(r)}{Z(r)} \equiv 2m^2\frac{Z''(r)}{Z(r)} + A$$

или

$$Z^{\mathrm{IV}}(r) - 2m^2 Z''(r) - A\cdot Z(r) = 0. \tag{35}$$

Уравнение

$$\lambda^4 - 2m^2\lambda^2 - A = 0 \tag{36}$$

дает:

$$\lambda = \pm\sqrt{m^2 \pm \sqrt{m^4 + A}};$$

если

$$A \neq -m^4,$$

то все четыре корня уравнения (36) различны и потому четыре независимых интеграла уравнения (35) имеют вид:

$$e^{\lambda_k z};$$

когда

$$m \neq 0 \quad \text{и} \quad A = -m^4,$$

то два корня уравнения (36) равны $+m$, а два равны $-m$, так что независимые интеграла уравнения (46) будут таковы:

$$ze^{mz}, \quad e^{mz}, \quad ze^{-mz} \quad \text{и} \quad e^{-mz};$$

наконец, если

$$m = 0 \quad \text{и} \quad A = 0,$$

то все четыре корня уравнения (46) равны нулю, а потому независимые интегралы уравнения (35) будут

$$z^3, \quad z^2, \quad z \quad \text{и} \quad 1.$$

6. Полагая

$$\omega(r, z) \equiv \omega_1(r, z) \equiv R(r)\,e^{mz}$$

в уравнении (29), по сокращении на e^{mz} получим:

$$R^{\mathrm{IV}}(r) + 2m^2 R''(r) + m^4 R(r) - \frac{2}{r}\left[R'''(r) + m^2 R'(r)\right] + \\ + \frac{3}{r^2}R''(r) - \frac{3}{r^3}R'(r) = 0; \tag{37}$$

здесь сначала положим:

$$r = \frac{\rho}{m}, \tag{38}$$

что даст, по сокращении на m^4:

$$R_\rho^{IV} + 2R_\rho'' + R - \frac{2}{\rho}(R_\rho''' + R_\rho') + \frac{3}{\rho^2} R_\rho'' - \frac{3}{\rho^3} R_\rho' = 0;$$

а затем сделаем

$$R \equiv \rho Q,$$

что приведет к уравнению:

$$\rho Q_\rho^{IV} + 2Q_\rho''' + 2\rho Q_\rho'' + 2Q_\rho' + \rho Q - \frac{3}{\rho} Q_\rho'' - \frac{2}{\rho} Q + \frac{3}{\rho} Q_\rho' - \frac{3}{\rho^3} Q = 0$$

или

$$\left[\rho Q_\rho'' + Q_\rho' + \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) Q\right]_\rho'' - \frac{1}{\rho}\left[\rho Q_\rho'' + Q_\rho' + \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) Q\right]_\rho' +$$
$$+ \left[\rho Q_\rho'' + Q_\rho' + \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) Q\right] = 0;$$

поэтому, если положим

$$\rho Q_\rho'' + Q_\rho' + \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) Q \equiv \rho S,$$

то будем иметь

$$(\rho S)_\rho'' - \frac{1}{\rho}(\rho S)_\rho' + \rho S = 0$$

или

$$\rho S_\rho'' + S_\rho' + \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) S = 0.$$

Таким образом имеем два совокупных уравнения:

$$Q_\rho'' + \frac{1}{\rho} Q_\rho' + \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) Q = S \tag{39}$$

и

$$S_\rho'' + \frac{1}{\rho} S_\rho' + \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) S = 0; \tag{40}$$

для их интегрирования заменим второе из них следующим:

$$S_\rho'' + \frac{1}{\rho} S_\rho' + \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) S = k^2 Q, \tag{40 bis}$$

которое при

$$k = 0$$

обращается в (40); тогда легко получим, что

$$(S \pm Qk)_\rho'' + \frac{1}{\rho}(S \pm kQ)_\rho' + \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)(S \pm Q) = \pm k(S \pm Q)$$

или

$$F_\rho'' + \frac{1}{\rho} F_\rho' + \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) F = kF, \tag{41}$$

где

$$F \equiv S + kQ,$$

причем число k может иметь любой знак.

Написав (51) так:

$$F_\rho'' + \frac{1}{\rho} F_\rho' + \left[(1-k) - \frac{1}{\rho^2}\right] F = 0,$$

положим

$$\rho = \frac{\sigma}{\sqrt{1-k}}; \tag{42}$$

тогда предыдущее уравнение, по сокращении на $(1-k)$, обратится в такое

$$F_\sigma'' + \frac{1}{\sigma} F_\sigma' + \left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right) F = 0,$$

откуда заключаем, что

$$F \equiv AJ_1(\sigma) + BY_1(\sigma), \tag{43}$$

а следовательно,

$$S + kQ \equiv AJ_1\left(\rho\sqrt{1-k}\right) + BY_1\left(\rho\sqrt{1-k}\right)$$

и

$$S - kQ \equiv AJ_1\left(\rho\sqrt{1+k}\right) + BY_1\left(\rho\sqrt{1+k}\right)$$

и, следовательно,

$$Q \equiv \frac{A}{2} \frac{J_1\left(\rho\sqrt{1-k}\right) - J_1\left(\rho\sqrt{1+k}\right)}{k} + \frac{B}{2} \frac{Y_1\left(\rho\sqrt{1-k}\right) - Y_1\left(\rho\sqrt{1+k}\right)}{k};$$

это выражение, в котором мы должны теперь повести k к нулю, и показывает, что в формулах для

$$S + kQ \quad \text{и} \quad S - kQ$$

мы не могли взять коэффициенты при J_1 и Y_1 не равными друг другу по-парно... Подводя k к нулю и применяя правило L'Hospitale'я, получим:

$$Q \equiv -\frac{A}{2}\left[\frac{\rho J_1'\left(\rho\sqrt{1-k}\right)}{2\sqrt{1-k}} + \frac{\rho J_1'\left(\rho\sqrt{1+k}\right)}{2\sqrt{1+k}}\right]_{k=0} -$$

$$-\frac{B}{2}\left[\frac{\rho Y_1'\left(\rho\sqrt{1-k}\right)}{2\sqrt{1-k}} + \frac{\rho Y_1'\left(\rho\sqrt{1+k}\right)}{2\sqrt{1+k}}\right]_{k=0},$$

т. е.

$$Q \equiv -\frac{A}{2}\rho J_1'(\rho) - \frac{B}{2}\rho Y_1(\rho). \tag{44}$$

Принимая во внимание, что одно из значений функции S есть нуль и что при этом само Q будет цилиндрической функцией 1-го порядка, заключаем, что

$$\omega_1 \equiv \sum_{i=0}^{\infty} [A_i r^2 J_1'(m_i r) + B_i r^2 Y_1'(m_i r)] e^{m_i z} + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} [A_1' r J_1'(m_1' r) + B_i' Y_1(m_i r)] e^{m_i' z}. \qquad (45)$$

7. Если положим:

$$\omega(r, z) \equiv \omega_2(r, z) \equiv rR(r) \cdot re^{nz},$$

то уравнение (29) примет вид:

$$\left\{\left[rR^{\text{IV}} + 2R''' + 2n^2 rR'' - \frac{3}{r} R'' + 2n^2 R' + \frac{3}{r^2} R' + n^4 rR - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{2}{r} n^2 R - \frac{3}{r^3} R\right] z + 4n\left[rR'' + R' + \left(n^2 r - \frac{1}{r}\right) R\right]\right\} e^{nz} \equiv 0,$$

откуда заключаем, что одновременно:

$$rR^{\text{IV}} + 2R''' + 2n^2 rR'' - \frac{3}{r} R'' + 2n^2 R' + \frac{3}{r^2} R' + n^4 rR - \frac{2}{r} n^2 R - \frac{3}{R^3} R \equiv 0$$

и

$$rR'' + R' + \left(n^2 r - \frac{1}{r}\right) R \equiv 0;$$

но первое из этих уравнений есть непременное следствие второго, ибо его можно написать так:

$$\left[rR'' + R' + \left(n^2 r - \frac{1}{r}\right) R\right]'' - \frac{1}{r}\left[rR'' + R' + \left(n^2 r - \frac{1}{r}\right) R\right]' + \\ + n^2\left[rR'' + R' + \left(n^2 r - \frac{1}{r}\right) R\right] \equiv 0;$$

второе же при

$$r = \frac{\rho}{n}$$

принимает, по сокращении на n^2, вид:

$$R_\rho'' + \frac{1}{\rho} R_\rho' + \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) R = 0,$$

и, следовательно, имеет общим интегралом цилиндрическую функцию 1-го порядка, так что:

$$\omega_2(r, z) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} [C_i r J_1(n_i \rho) + D_i r Y_1(n_i \rho)] z e^{n_i z}. \qquad (46)$$

8. Нам нужно найти, наконец, частный интеграл уравнения (29), имеющий вид

$$R_1(r)z^3 + R_2(r)z^2 + R_3(r)z + R_4(r);$$

а кроме того ясно, что это уравнение может иметь еще частный интеграл, вовсе не зависящий от r и могущий, очевидно, быть лишь целым многочленом не выше 3-й степени. Эта часть $\omega_3(r, z)$ функции $\omega(r, z)$ ищется самым элементарным путем, который в результате даст:

$$\begin{aligned}\omega_3(r, z) \equiv {} & A[16z^7 - 840r^4 \lg r \cdot z + (420r^6 \lg r - 175r^6)z] + \\ & + B[16z^6 - 360r^4 \lg r \cdot z^2 + (60r^6 \lg r - 25r^6)] + \\ & + C(2z^5 - 15r^4 \lg r \cdot z) + D(2z^4 - 3r^4 \lg r) + \\ & + (Ez^3 + Fz^2 + Gz + H) + A_1(2r^4 z^3 - r^6 z) + \\ & + A_2(2r^2 \lg r \cdot z^3 - 3r^4 \lg r \cdot z) + A_3 r^2 z^3 + \\ & + B_1(6r^4 z^2 - r^6) + B_2(6r^2 \lg r \cdot z - 3r^4 \lg r) + \\ & + B_3 r^2 z^2 + (C_1 r^4 z + C_2 z^2 \lg r + \underline{C_3 r^2 z}) + \\ & + (D_1 r^4 + \underline{D_2 r^2 \lg r + D_3 r^2}),\end{aligned} \tag{47}$$

причем подчеркнутые 3 члена можно отбросить, так как они сами собою исчезают из выражений для h и w, получаемых по формулам (21) и (22).

Итак, окончательно

$$\begin{aligned}\omega(r, z) \equiv {} & \sum_{i=0}^{\infty} [A_i r^2 J_1'(m_i r) + B_i r^2 Y_1'(m_i r)] e^{m_i z} + \sum_{i=0}^{\infty} [A_i' r J_1(m_i' r) + \\ & + B_i' r Y_1(m_i' r)] e^{m_i' z} + \sum_{i=0}^{\infty} [C_i r J_1(m_i r) + D_i r Y_1(n_i r)] z e^{n_i z} + \omega_3(r, z).\end{aligned} \tag{48}$$

G. GRODSKIJ. SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SOLIDE ISOTROPE DE RÉVOLUTION LORSQUE SA MASSE ET TOUTES LES FORCES SONT DISTRIBUÉES SYMÉTRIQUEMENT AUTOUR DE SON AXE

RÉSUMÉ

Par raison de cette symétrie on peut mettre les expressions des forces élastiques sous cette forme:

$$R_r = A\left(\frac{\mu}{1-2\mu}\,\theta + \frac{\partial h}{\partial r}\right), \quad K_k = A\left(\frac{\mu}{1-2\mu}\,\theta + \frac{h}{r}\right), \quad Z_z = A\left(\frac{\mu}{1-2\mu}\,\theta + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{1}$$

$$R_z = Z_r = \frac{A}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \quad Z_k = K_z = \frac{A}{2}\,\frac{\partial k}{\partial z}, \quad K_r = R_k = \frac{A}{2}\, r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k}{r}\right) \tag{2}$$

ou l'axe oz coïncide avec le dit axe de symétrié h, k et w sont les déplacements du point (x, y, z) dans la direction du rayon-vecteur r, dans la diréction du perpendiculaire à celle-là et parallelement à l'axe oz

$$\theta = \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{h}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3}$$

E est le module de l'élasticité du solide, μ est «le nombre de Poisson» (ét égale à 0,3) enfin

$$A = \frac{E}{1+\mu}.$$

Les équations de l'équilibre s'écrirant comme il suit:

$$\frac{\partial Rr}{\partial r} + \frac{Rr - Kk}{r} + \frac{\partial Rz}{\partial z} = O \tag{4}$$

$$\frac{\partial Rk}{\partial r} + \frac{2}{r} R_k + \frac{\partial Zk}{\partial z} = O \tag{5}$$

$$\frac{\partial Rz}{} + \frac{1}{r} R_z + \frac{\partial Zz}{\partial z} = O \tag{6}$$

où nous n'écrivons pas de termes représentants les forces proportionelles aux masses des points du corps parce que dans un autre mémoire j'ai montré qu'on peut toujours éxlure de telles termes à l'aide des potentiels sait Newtoniens sait logarithmiques.

La forme de ces équations permet voir que les déplacements radial (h) et longitudinal (w) sont indépendants du déplacement de torsion (k) et qu'inversement cette dernière est indépendant de h et w.

Comme la substitution des expressions (2) dans l'équation (5) donne pour k l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial k}{\partial r} - \frac{k}{r^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} = O \tag{7}$$

nous pouvons trouver que

$$\begin{aligned} k = arz + br + \frac{cz+t}{r} + \sum_{i=1}^{\infty} [A_i\, J_i\,(m_i r) + R_i\, Y_1\,(m_i r)] \cos h\,(m_i z) + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} [C_i\, J_1\,(n_i r) + D_i\, Y_1\,(n_i r)] \sin h\,(u_i r) \end{aligned} \tag{8}$$

où $J_1(x)$ et $Y_1(x)$ sont les fonctions cylindriques de la première et de la seconde espèce du premier ordre. A l'aide de quelques transformations nous pouvons aussi recevoir les expressions

$$h = \frac{1-\mu}{r}\frac{\partial^3 \omega}{\partial z^3} - \mu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \omega}{\partial r\, \partial z}\right) \tag{9}$$

$$m = -\frac{\mu}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r\, \partial z^2} + \frac{1-\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)\right] \tag{10}$$

et encore

$$R_r = A \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right]\right. \tag{11}$$

$$Z_z = \frac{A}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\, \partial z}\left[r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)\right] \tag{12}$$

$$R_z = Z_r = -A \frac{\partial^3}{\partial r\, \partial z^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) \tag{13}$$

$$\theta \equiv \frac{1-2\mu}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\, \partial z}\left\{r \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right]\right\} \tag{14}$$

où la fonction $\omega(r, z)$ est déterminée par l'équation differentielle du quatrième ordre:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial z^4} - \frac{2}{r}\left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial r \partial z^2}\right) + \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3}\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \tag{15}$$

dont la résolution la plus générale peut être représentée sous cette forme:

$$\begin{aligned} \omega(r, z) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} [A_i r^2 J_1'(m_i r) + B_i r^2 Y_1'(m_i r)] e^{m_i z} + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} [A_i' r J_1(m_i' r) + B_i r Y_1(m_i' r)] e^{m_i' z} + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} [C_i r J_1(n_i r) + D_i r Y_1(n_i r)] z e^{n_i z} + \overline{\omega}(r, z) \end{aligned} \tag{16}$$

où

$$\begin{aligned} \overline{\omega}(r, z) \equiv A [16 z^7 - 840 z^3 r^4 \lg r + (420 \lg r - 175) r^6 z] + \\ + B [16 z^6 - 360 z^2 r^4 \lg r + (60 \lg r - 25) r^6] + C [2 z^4 - 15 r^4 \lg r] z + \\ + D [2 z^4 - 3 r^4 \lg r] + [E z^3 + F z^2 + G z + H] + A_1 [2 r^4 z^3 - r^6 z] + \\ + A_2 [2 z^3 - 3 r^2 z] r^2 \lg r + A_3 r^2 z^3 + B_1 [6 r^4 z^2 - r^6] + \\ + B_2 [2 z^2 - r^2] 3 r^2 \lg r + B_3 r^2 z^2 + [C_1 r^4 z + C_2 z r^2 \lg r] + D_1 r^4. \end{aligned} \tag{17}$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЕЛАКСАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ХИЩНИКАМИ И ЖЕРТВАМИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ПОПУЛЯЦИЯМ ДВУХ ПРОСТЕЙШИХ

Г. Ф. ГАУЗЕ и А. А. ВИТТА

(*Представлено академиком* А. А. Рихтером)

Работы Лотка[1] и Вольтерра[2] теоретически показали, что процесс непрерывного взаимодействия одного вида хищников и одного вида жертв при полном постоянстве всех внешних факторов может привести к периодическим колебаниям численностей. В связи с большим значением этих работ для экологии и для математической теории естественного отбора в последнее время имели место попытки их дальнейшей математической детализации (Бэйли[3]). Такие «классические» колебания в смешанной популяции фактически наблюдались Гаузе[4] на популяциях некоторых одноклеточных, однако в довольно специализированной обстановке. Как показывают опыты на простейших,[5] значительно чаще приходится иметь дело с так называемыми «релаксационными колебаниями», при которых взаимодействие одного вида с другим является апериодичным и ведет к исчезновению обоих компонентов — уничтожение жертв и вымирание хищников (релаксация), причем лишь непрерывное вмешательство извне в форме иммиграций приводит к периодическим колебаниям. Принципиально тот же самый тип колебаний (лишь осложненный иммунитетом) имеет место и в случае эпидемий, где волна заболеваний апериодически проносится после того, как концентрация восприимчивых особей достигла некоторого порога (Topley[6]).

В связи с этим разработка математической теории такого релаксационного взаимодействия между видами представляет большой интерес, и настоящая

[1] Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 6, p. 410 (1920).
[2] Rend. Acc. Lincei., vol. 5, p. 3 (1927).
[3] Proc. Roy. Soc., A., vol. 143, p. 75 (1933).
[4] Journ. Exp. Biol. vol. 12, p. 44 (1935).
[5] Gause. Science, vol. 79, p. 16 (1934).
[6] Lancet, p. 477 (1926).

статья является попыткой анализа релаксации на конкретном примере взаимодействия между двумя видами инфузорий, один из которых, *Didinium nasutum*, пожирает другой, *Paramecium caudatum*.

1. Уравнение элементарной релаксации

Если N_1 — плотность популяции жертв, а N_2 — хищников, то уравнение взаимодействия между ними можно написать в такой форме:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= b_1 N_1 - f(N_1, N_2)\\ \frac{dN_2}{dt} &= F(N_1, N_2)\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

здесь b_1 — коэффициент размножения жертв (характеризующий скорость геометрического возрастания); $f(N_1, N_2)$ — функция, характеризующая поглощение жертв хищниками; $F(N_1, N_2)$ характеризует одновременно размножение и смертность хищников. В частном случае, детально исследованном Вольтерра, $f(N_1, N_2)$ для упрощения дан вид: $k_1 N_2 N_1$, а $F(N_1, N_2)$ соответственно: $b_2 N_2 N_1 - d_2 N_2$, причем k_1, b_2 и d_2 постоянные параметры:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= b_1 N_1 - k_1 N_2 N_1\\ \frac{dN_2}{dt} &= b_2 N_2 N_1 - d_2 N_2\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здесь k_1 и b_2 характеризует поглощение жертв и прирост хищников, а d_2 — коэффициент смертности хищников. В этом детально исследованном Лотка[1] и Вольтерра[1] случае, получаются «классические» колебания численностей типа центра, т. е. интегральные кривые на плоскости N_1, N_2 представляют собой систему замкнутых кривых.

Такие колебания очень часто не осуществляются и превращаются в элементарную релаксацию в виду чрезвычайно активного поглощения одного вида другим, уничтожающим его до конца. Мы можем здесь допустить (на основании экспериментальных данных), что при достаточно больших N_2 смертность хищников становится заметной лишь при $N_1 \to 0$; идеализируя это обстоятельство будем считаться со смертностью лишь при $N_1 = 0$. Кроме того, размножение хищников слабо зависит от N_1 (при недостатке жертв хищники продолжают размножаться за счет измельчания особей; в связи с этим и поглощение жертв слабо зависит от N_1).

[1] Ibid.

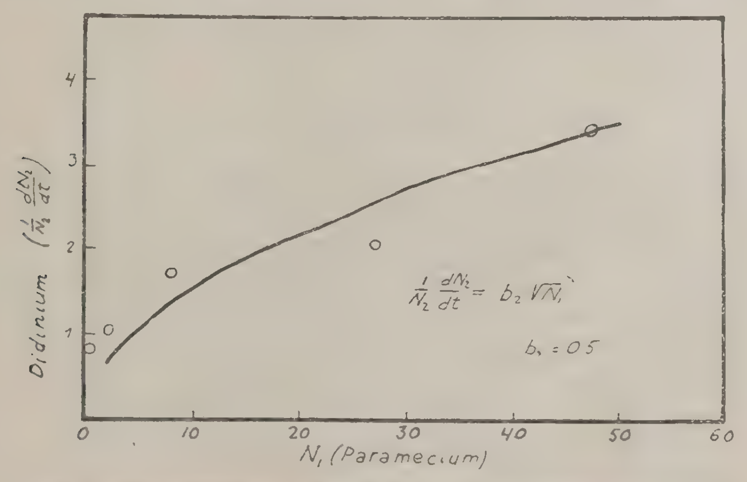
Вводя эти соображения в уравнение Вольтерра (2), мы прежде всего предположим,[1] что смертность хищников равна нулю, когда $N_1 \neq 0$, и равна $-d_2 N_2$ при $N_1 = 0$. Кроме того, для ослабления зависимости членов, характеризующих взаимодействие видов от N_1, мы заменим в уравнении Вольтерра N_1 на $\sqrt{N_1}$. Тогда уравнение взаимодействия между видами примет такой вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= b_1 N_1 - k_1 N_2 \sqrt{N_1} \\ \frac{dN_2}{dt} &= b_2 N_2 \sqrt{N_1} (N_1 \neq 0) \\ &= -d_2 N_2 (N_1 = 0) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ниже мы убедимся в том, что введение этих предпосылок в уравнение Вольтерра полностью соответствует действительности. Оно лишает это последнее периодических свойств и приводит к элементарной релаксации.

2. О зависимости $f(N_1, N_2)$

Вопрос о рациональном выражении этой функции уже разбирался нами в другом месте,[2] и сейчас нас интересует лишь возможно более простое выра-



Фиг. 1. Связь относительного прироста хищников (N_2) с плотностью жертв N_1 (число особей в 0.5 с³).

жение, при котором сохранились бы все свойства релаксации, но было бы упрощено исследование последней. Чтобы ослабить зависимость $f(N_1, N_2)$ от N_1, мы

[1] Этой предпосылки уже достаточно для уничтожения классических колебаний Вольтерра.
[2] Gause. Zeitschr. ang. Entom., vol. 20, p. 619 (1934).

написали ее в уравнении (3) в форме: $b_2 N_2 \sqrt{N_1}$. Это допущение является удовлетворительным в виде первого приближения к действительности, как показывает фиг. 1. Здесь кривая, проходящая около экспериментальных точек, была вычислена по уравнению:

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} = b_2 \sqrt{N_1}$$

Некоторый интерес представляет значение $\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt}$ при $N_1 = 0$. В опытах оно обычно не равно нулю, так как хищники N_2 размножаются за счет измельчания и при отсутствии N_1. Однако, если условия среды не вполне благоприятны для N_2, то такой «остаточный рост» отсутствует. При этом общие свойства релаксации остаются прежними. Таким образом, мы можем пока пренебречь этим обстоятельством.

3. Свойства уравнения релаксации

Мы можем теперь рассмотреть в общих чертах свойства уравнения релаксации (3), придав параметрам численные значения. Эти последние взяты из опытов с *Paramecium* и *Didinium* и несколько округлены:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1 - 1.4\, N_2 \sqrt{N_1}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = 0.5\, N_2 \sqrt{N_1}$$

Если на оси абсцисс нанести N_2, а на оси ординат N_1, то, отвлекаясь от времени, мы получим ясное представление о взаимодействии двух видов. Уравнение (2) приводит к ряду замкнутых кривых, не пересекающихся с осью абсцисс и ординат. Чтобы определить тип кривой, соответствующей уравнению релаксации (3), мы можем построить интегральные кривые по изоклинам.

Элиминируя независимую переменную t из уравнения (3) мы получаем:

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{b_1 N_1 - k_1 N_2 \sqrt{N_1}}{b_2 N_2 \sqrt{N_1}} = \frac{b_1 \sqrt{N_1} - k_1 N_2}{b_2 N_2} = \varepsilon = \operatorname{tg} \varphi$$

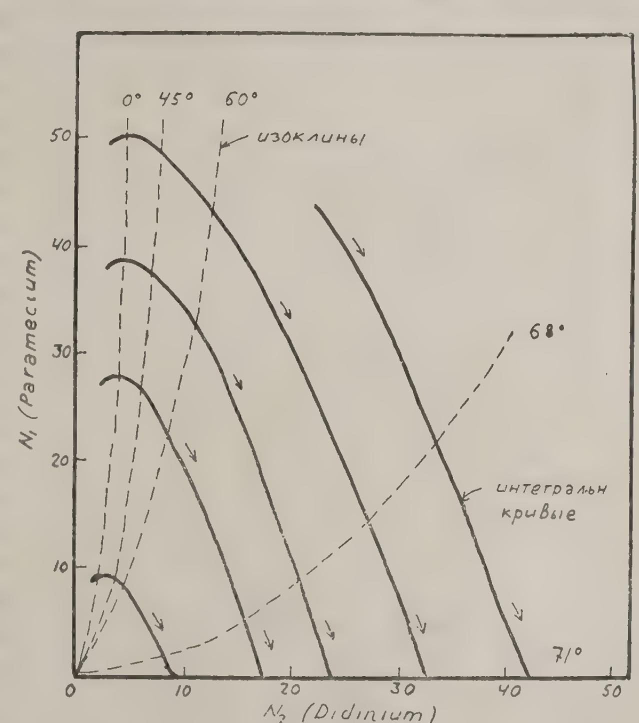
Простое преобразование дает:

$$b_1 \sqrt{N_1} = (\varepsilon b_2 + k_1)\, N_2$$

$$N_1 = \frac{(\varepsilon b_2 + k_1)^2}{b_1^2}\, N_2^2$$

Таким образом, изоклины представляют собой семейство парабол.

На фиг. 2 пунктиром нанесены изоклины и сплошными линиями — интегральные кривые соответствующие уравнению релаксации. Эти кривые в общих чертах совпадают с тем, что имеет место в действительности (фиг. 3). Здесь в различные моменты роста популяции N_1, вносились значительные концентрации N_2. При изображении процесса взаимодействия двух видов на отвлеченной от времени системе координат N_1, N_2, мы получили кривые, пересекающиеся с осью абсцисс (так как жертвы N_1, уничтожаются до конца; см. $a\ b\ c\ d$, a_1, b_1, c_1, d_1 на фиг. 3). Лишь после пересечения под влиянием $d_2\ N_2$ кривая возвращается по оси абсцисс к нулевой точке. Единственным отличием экспериментальных кривых на фиг. 3 от интегральных кривых, построенных по уравнению релаксации на фиг. 2, является загиб экспериментальных кривых в нижней части, связанный с остаточным ростом (измельчание хищников N_2 при отсутствии жертв N_1), который не был нами введен в уравнение релаксации. В условиях, не совсем оптимальных для N_2, последний не имеет места (пунктирные кривые на фиг. 3 и *bcde* на фиг. 4), и интегральные кривые полностью совпадают с действительностью.

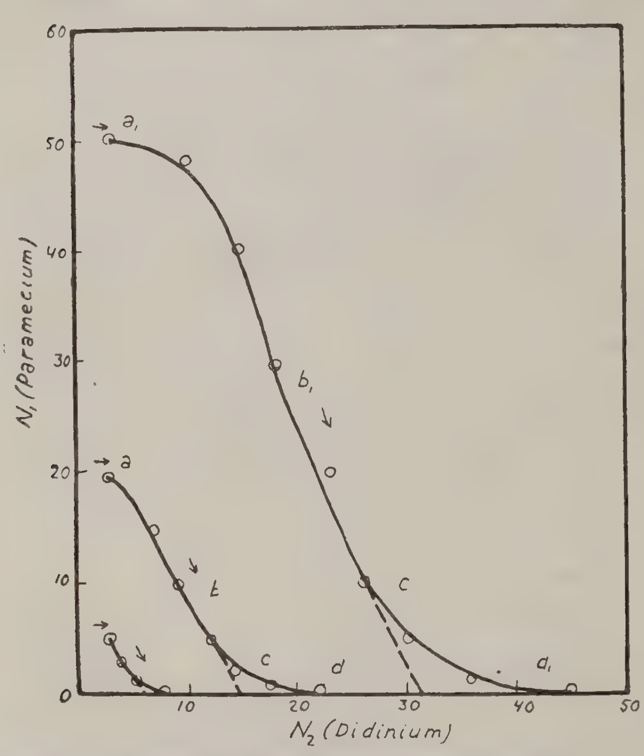


Фиг. 2. Интегральные кривые для уравнения элементарной релаксации.

4. Усложнение уравнения релаксации

Мы написали выше уравнение релаксации в первом приближении, которое справедливо для больших значений N_1 или N_2. Рассматривая теперь экспериментальные кривые на плоскости N_1, N_2 при весьма малых значениях последних (фиг. 4), мы можем видеть, что они движутся справа налево

и пересекаются с осью ординат (фиг. 4,а). Иными словами, при очень небольших концентрациях хищников и жертв первые «не прививаются» и вымирают до конца, вслед за чем начинают расти жертвы. Это имеет место до тех пор, пока концентрация жертв N_1 не превысила некоторого порогового значения a_h и, следовательно, может начаться элементарная релаксация. В эпидемиологии такая пороговая плотность имеет особенно большое значение.



Фиг. 3. Эмпирические кривые взаимодействия хищников N_2 и жертв N_1.

Внесение некоторых усложнений в уравнение релаксации легко распространяет его на все значения N_1 и N_2. Если пересечение кривых с осью абсцисс (фиг. 4, зона e) связано с большой активностью поглощения жертв хищниками, то пересечение кривых с осью ординат (фиг. 4, зона a) очевидно связано с большой чувствительностью хищников к недостатку пищи.

Мы можем теперь сказать, на основании экспериментальных данных, что по мере приближения N_1 к нулю величина $b_2 N_2 \sqrt{N_1}$ уменьшается смертностью $f(N_2)$, которая в конце концов даже превышает ее. Таким образом, в усложненном уравнении:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= b_2 N_2 \sqrt{N_1} - f(N_2) \quad (N_1 \neq 0) \\ &= -d_2 N_2 \qquad\qquad\quad (N_1 = 0) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Вводя фактор смертности в такой форме:

$$b_2 N_2 [\sqrt{N_1} - f_2(N_2)]$$

ему можно придать следующие свойства: когда $N_2 \to \infty$, то $N_2 f_2(N_2) \to 0$ и при больших численностях мы получаем прежнее элементарное выражение $b_2 N_2 \sqrt{N_1}$. Что касается $f_2(N_2)$, то она представляет собою до некоторого конечного значения $N_2 = n_2$ положительную монотонно убывающую функцию, начинающуюся с конечного значения при $N_2 = 0$ и стремящуюся к нулю при $N_2 = n_2$. Дальше она везде равна нулю (фиг. 5,1).

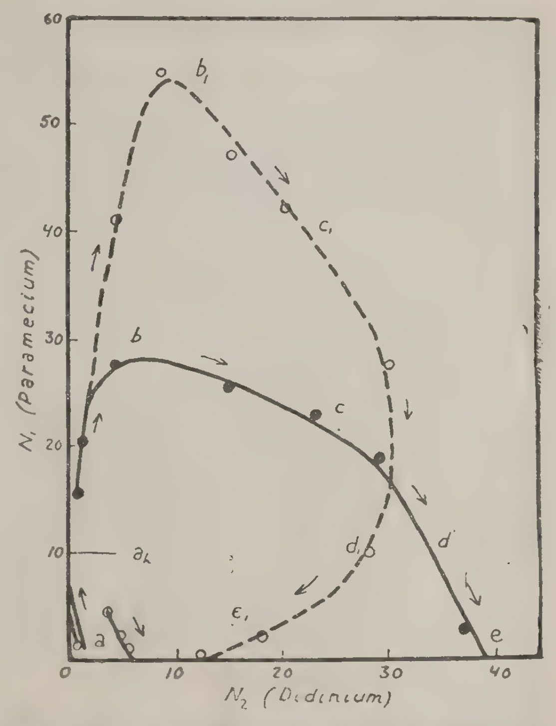
Так как вертикальные касательные интегральных кривых на плоскости N_1, N_2 имеют место, когда

$$\frac{dN_2}{dt} = b_2 N_2 [\sqrt{N_1} - f_2(N_2)] = 0,$$

то отсюда уравнение вертикальных касательных

$$\sqrt{N_1} = f_2(N_2),$$

и таким образом фактор смертности $f_2(N_2)$ как раз и определяет пороговую плотность N_1 (a_h на фиг. 4).



Фиг. 4. Кривые взаимодействия хищников N_2 и жертв N_1 при различных плотностях (в связи с не вполне благоприятными физико-химическими условиями для N_2 «остаточный рост» последних не имеет места).

Некоторое обобщение можно внести и в верхнюю часть уравнения релаксации. Коэффициент k_1, характеризующий интенсивность поглощения жертв хищниками (процент таких встреч хищников с жертвами, которые оканчиваются гибелью жертв) сохраняется постоянным лишь в зоне больших концентраций, а вообще:

$$\frac{dN_1}{dt} = b_1 N_1 - f_1(N_1) N_1 N_2 \tag{5}$$

причем:

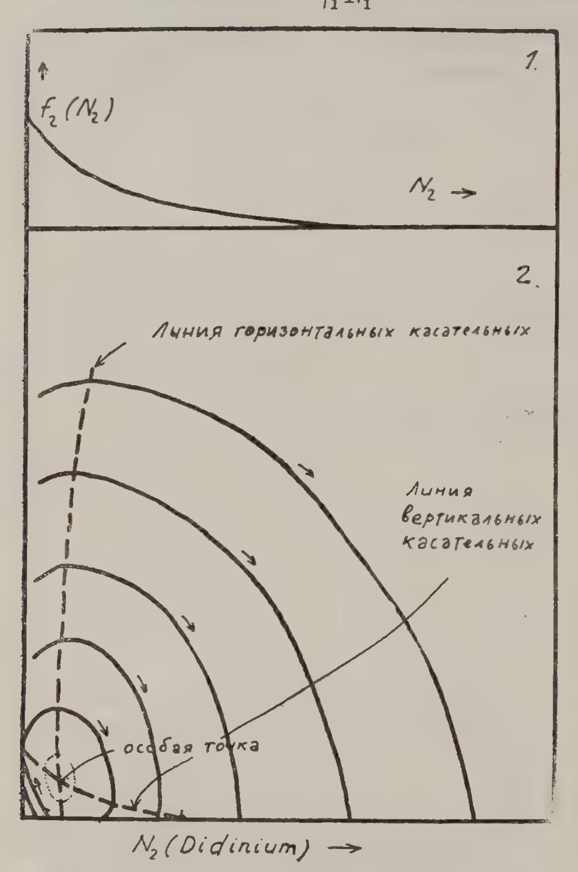
$$f_1(N_1) N_1 \underset{N_1 \to \infty}{=} k_1 \sqrt{N_1}$$

Иными словами, интенсивность ловли может повышаться при недостатке N_1. здесь $f_1(N_1)$ является положительной монотонно убывающей функцией, начинающейся с конечного значения при $N_1 = 0$ и стремящейся к нулю при $N_1 \to \infty$ [ее схематический вид такой же, как и $f_2(N_2)$]. Уравнения (4) и (5) суть усложненные уравнения релаксации.

Горизонтальные касательные будут иметь место, когда $\frac{dN_1}{dt} = 0$, и отсюда их уравнение $N_2 = \frac{b_1}{f_1 N_1}$. Система уравнений (4) и (5) допускает одну особую точку, соответствующую состоянию равновесия и определяемую уравнениями

$$\sqrt{N_1} = f_2(N_2) \text{ и } N_2 = \frac{b_1}{f_1 N_1}.$$

Эта особая точка в общем может быть либо фокусом, либо узлом, в зависимости от численных соотношений биологических параметров. Мы не останавливаемся детально на области особой точки, так как нам не хватает еще экспериментальных данных, которые к тому же затемняются здесь статистическим процессом. Как раз в случае *Paramecium* и *Didinium* область особой точки лежит очень близко к началу координат (заштрихованный контур на фиг. 4). «Классические» колебания здесь возможны при такой ничтожной плотности хищников и жертв, что они просто поглощаются статистическими случайностями, которые согласно биологическим наблюдениям представляют собою значительно более мощный фактор как раз при небольших плотностях.



Фиг. 5. 1. Связь между N_2 и $f_2(N_2)$; 2. Интегральные кривые для усложненного уравнения релаксации.

На фиг. 5 схематически изображена система интегральных кривых, соответствующая усложненным уравнениям релаксации (4) и (5).

Рассматривая фиг. 5, мы можем отметить следующее. При больших значениях N_1 и N_2 мы получаем полное совпадение с фиг. 2, т. е. элементарные релаксации. При малых значениях N_1 и N_2 интегральные кривые возвращаются на ось ординат, в полном согласии с экспериментальными данными фиг. 4 (хищники «не прививаются» при концентрации жертв N_1 ниже пороговой a_h). Общий

вид фиг. 5 ясно показывает, что релаксации могут рассматриваться как неосуществившиеся вследствие биологических приспособлений классические Вольтеровские колебания.

5. Влияние притока N_1 и N_2 на релаксации

Уравнения [(4), (5)] выражают типичные релаксации в общем виде, и нам остается посмотреть, как слабый и одновременный приток N_1 и N_2 через интервалы времени t вызывает здесь периодические изменения. Иными словами, здесь дело идет о влиянии слабых толчков. Слабые толчки вначале (a, фиг. 4) приводят к возвращению кривой на ось ординат. После того, как концентрация N_1, превысила пороговое значение a_h возникают релаксации, причем на основании фиг. 5 легко рассчитать, как задержка толчка после наступления пороговой плотности повышает величину релаксации (важность этой проблемы для эпидемиологии была недавно отмечена Kermack и Mc Kendrick).[1] После того, как релаксация уже наступила, слабые толчки — иммиграции — не оказывают существенного влияния до момента пересечения интегральных кривых с осью абсцисс, и дальше при движении по оси абсцисс до пересечения с линией горизонтальных касательных (фиг. 5). После этого толчки снова приводят к возвращению на ось ординат, и процесс начинается снова.

Межинститутское биофизическое объединение
Московского государственного университета.
Лаборатория экологии Института зоологии
и Лаборатория колебаний Института физики.

G. GAUSE and A. WITT. ON THE PERIODIC FLUCTUATIONS IN THE NUMBERS OF ANIMALS A MATHEMATICAL THEORY OF THE RELAXATION INTERACTION BETWEEN PREDATORS AND PREY AND ITS APPLICATION TO A POPULATION OF PROTOZOA

SUMMARY

The problem of the relaxation interaction between predators and prey is investigated in this paper. The relaxation may be considered as a consequence of certain biological adaptations which disturb the conditions of the classical equation taken for granted by Lotka and by Volterra. The mathematical theory of relaxation fluctuations is in complete accordance with the experimental data obtained on Protozoa (*Paramecium caudatum* and *Didinium nasutum*), and there is reason to suspect that the spread of epidemics belongs to the same type of periodic variations.

---

[1] Proc. Roy. Soc., A, vol. 115, p. 700 (1927).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИОДА С КРАХМАЛОМ

С. В. НЕДЗВЕЦКОГО

(*Представлено академиком* **В. А. Кистяковским**)

Несмотря на свою большую давность (первые работы по этому вопросу относятся к 1833 г.) вопрос о взаимодействии иода с крахмалом не может считаться выясненным и до настоящего времени. Прежние авторы Mylius[1], Rouvier[2] и др. придерживались того взгляда, что иодкрахмал есть химическое соединение давая ему определенную химическую формулу, различную у разных авторов. С развитием коллоидной химии воззрение на структуру иодкрахмала переменилось. Biltz[3], Harrison[4] и другие рассматривали иодкрахмал как соединение адсорбционное. Küster[5] и Katayama[6] считали, что это есть раствор иода в крахмале.

В настоящее время сравнительно немногие авторы, как Mellanby[7], Bergman и Ludewig,[8] A. Pictet и Vogel,[9] считают иодкрахмал химическим соединением. Так, последние авторы доказывают, что синее окрашивание с иодом зависит не от коллоидного состояния, а от определенной химической структуры. Им удалось получить изотригексозан, вещество сравнительно простого состава, которое, не будучи в коллоидном состоянии, дает тем не менее интенсивное фиолетовое окрашивание с иодом, подобно крахмалу. Гораздо большее число исследователей придерживаются того взгляда, что иодкрахмал представляет собою адсорбционное соединение. Горбачев и Виноградова,[10] Bungenberg de Jong и Lanciny,[11]

[1] Berichte d. deutsch. chemisch. Gesellschaft, 20 (1887), 28 (1895).
[2] Comptes rendus Acad. des Sciences, 124 (1887).
[3] Berichte d. deutsch. chem. Gesellschaft, 87 (1904).
[4] Kolloid Zeitschr., 11 (1911).
[5] Annalen der Chemie, 283 (1894).
[6] Zeitschr. f. anorgan Chemie, 56 (1908).
[7] Biochemical Journal, 13 (1919).
[8] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch, 57 (1924).
[9] Chemisches Zentralblatt, 1 (1930) S. 2545.
[10] Журн. Русск. хим. общ., 59 (1927).
[11] Kolloid Beih., 35 (1932).

определяя количество иода, поглощенное зернами крахмала из раствора иода в иодистом калии, установили, что этот процесс выражается адсорбционной кривой, согласно уравнению Freundlich'a, причем на процесс поглощения иода оказывают влияние ионы, располагаясь по силе своего действия в ряды. Euler с сотрудниками,[1] исследуя поглощение крахмальным раствором иода из бензольного раствора, установили, что поглощение выражается той же адсорбционной кривой. К таким же результатам пришел Lottermoser с сотрудниками,[2] используя разнообразные физико-химические методы.

Экспериментальная часть

I. Соотношение между вязкостью и количеством иода в крахмальном растворе

Предварительные опыты показали, что вязкость крахмального раствора меняется различно в зависимости от количества прибавленного к нему иода. При малых концентрациях иода крахмальный раствор сохраняет свою вязкость, после того как количество иода достигнет определенной величины, вязкость начинает резко возрастать и при дальнейшем увеличении иода снова уменьшается вследствии наступающей коагуляции иодкрахмала.

Этот вопрос отчасти затронут в исследованиях Samec'a,[3] * но систематических исследований такого рода в литературе не известно. Поставленные опыты не только выяснили соотношение между изменением вязкости крахмального (т. е. иодкрахмального) раствора и количеством прибавляемого иода, но и дали некоторые данные для суждения о природе этой реакции.

Для исследования был взят растворимый крахмал «Гослаборснабжение», из которого по Bruins'y[4] готовился крахмальный раствор. Раствор иода (в иодистом калии) готовился обычным способом. Так как вязкость крахмального раствора зависит также и от концентрации электролитов, то употребляемый для исследования крахмальный раствор готовился таким образом, чтобы концентрация иодистого калия была все время постоянной, независимо от концентрации иода. Это достигалось добавлением к крахмальному раствору соответствующего количества раствора иодистого калия той же концентрации, что и в иодном растворе.

[1] Kolloid Zeitschr., 31 (1922).

[2] Zeitschr. f Electrochemie, 27 (1921), Kolloid Zeitschr., 52 (1930).

[3] Kolloid Beih., 13 (1920).

* Автор исследовал изменение вязкости и цветового оттенка окраски иодкрахмального раствора в зависимости от стояния.

[4] Kolloid Zeitschr., 54 (1931).

Вязкость полученного таким образом раствора измерялась в вискозиметре Ostwald'а через 35 минут после приготовления (вискозиметр помещался в водяной бане при постоянной температуре). Так как иодистый калий оказывает коагулирующее действие на иодкрахмал, то концентрация соли бралась возможно меньшей.

В таблицах приведены данные измерений вязкости по отношению к воде, удельный вес крахмала принят за единицу. 1 см³ иодного раствора содержал 6.4 мг иода.

Таблица 1

0.5% раствор крахмала

№	В 100 см³ раствора			t = 11.5°		t = 11.5°		t = 14.7°	
	Крахмал в г	KJ m-mol	J_2 см³	Время истеч. сек.	Вязкость t'/t	Время истеч. сек.	Вязкость t'/t	Время истеч. сек.	Вязкость t'/t
1	0.5	0.75	—	167	1.219	166.5	1.215	155	1.270
2	0.5	0.75	1	168	1.226	166	1.212	154.5	1.266
3	0.5	0.75	2	167	1.219	166	1.212	155	1.270
4	0.5	0.75	3	170	1.241	167	1.219	155.5	1.275
5	0.5	0.75	4	197.5	1.442	194	1.416	171.5	1.406
6	0.5	0.75	5	203	1.482	206	1.504	170	1.394
7	0.5	0.75	6	206	1.504	207	1.511	169	1.390

Таблица 2

0.75% раствор крахмала

№	В 100 см³ раствора			t = 15.3°		t = 14.5°	
	Крахмал в г	KJ m-mol	J_2 см³	Время истеч. сек.	Вязкость t'/t	Время истеч. сек.	Вязкость t'/t
1	0.75	0.75	—	171.5	1.416	175.5	1.427
2	0.75	0.75	1	170	1.405	174	1.415
3	0.75	0.75	2	170	1.405	175	1.423
4	0.75	0.75	3	170.5	1.409	175	1.423
5	0.75	0.75	4	171	1.413	176	1.431
6	0.75	0.75	4.5	172	1.421	176	1.431
7	0.75	0.75	5	176	1.455	180	1.463
8	0.75	0.75	6	203.5	1.682	211	1.715
9	0.75	0.75	7	204.5	1.690	215	1.748
10	0.75	0.75	8	206	1.702	218	1.772

Таблица 3

$1^0/_0$ крахмал

№	В 100 см³ раствора			t = 13.5°		t = 13.5°		t = 14.3°	
	Крахмал в г	KJ m-mol	J_2 см³	Время истеч. сек	Вязкость t'/t	Время истеч. сек.	Вязкость t'/t	Время истеч. сек.	Вязкость t'/t
1	1	0.75	—	211	1.661	211.5	1.665	202	1.629
2	1	0.75	1	210	1.654	210	1.654	200	1.613
3	1	0.75	2	209	1.646	211	1.661	199	1.605
4	1	0.75	3	210	1.654	210.5	1.657	200	1.613
5	1	0.75	4	209	1.646	211	1.663	201	1.621
6	1	0.75	5	212.5	1.673	215	1.693	204	1.645
7	1	0.75	6	216.5	1.705	221	1.740	206	1.661
8	1	0.75	7	240	1.890	261	2.055	240	1.935
9	1	0.75	8	292	2.300	333	2.622	277	2.234
10	1	0.75	9	319	2.212	348	2.740	281	2.266

Таблица 4

$1.5^0/_0$ крахмал

№	В 100 см³ раствора			t = 11°		t = 11°	
	Крахмал в г	KJ m-mol	J_2 см³	Время истеч. сек.	Вязкость t'/t	Время истеч. сек.	Вязкость t'/t
1	1.5	0.75	—	291	2.093	296	2.129
2	1.5	0.75	2	294	2.115	299	2.151
3	1.5	0.75	4	303	2.179	304	2.187
4	1.5	0.75	6	308	2.216	314	2.259
5	1.5	0.75	8	320	2.302	351	2.525
6	1.5	0.75	9	353.5	2.543	420	3.021
7	1.5	0.75	10	462	3.323	534	3.841
8	1.5	0.75	11	578	4.159	636	4.576

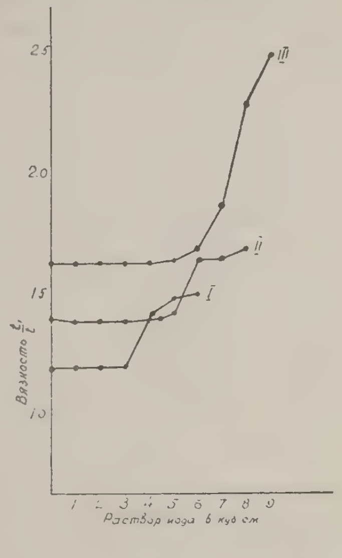
Графически найденное соотношение между вязкостью раствора и количеством прибавленного к нему иода дано на фиг. 1.

Приведенные данные вскрыли весьма интересную закономерность. Вязкость крахмального раствора совершенно не изменяется от прибавления к нему иода, пока количество последнего в крахмальном растворе не достигнет определенной величины, после чего вязкость резко возрастает. Далее сказалось, что это изменение вязкости не зависит от концентрации иода и крахмала в растворе, но оно наступает при строго определенном отношении между обоими компонентами.

$$\text{Табл. 1}\quad \frac{3\ \text{см}^3\ J_2}{0.5\ \text{г крахмала}} = 6,\quad \text{табл. 2}\quad \frac{4.5\ \text{см}^3\ J_2}{0.75\ \text{г крахмала}} = 6,$$

$$\text{табл. 3}\quad \frac{6\ \text{см}^3\ J_2}{1\ \text{г крахмала}} = 6,\quad \text{табл. 4}\quad \frac{9\ \text{см}^3\ J_2}{1.5\ \text{г крахмала}} = 6.$$

Некоторое отступление как бы показывает 1.5% раствор (табл. 4), вязкость этого раствора постепенно увеличивается с первой же порции прибавленного иода, но если обратить внимание на количественную сторону этих изменений, то видно ясно, что установленная закономерность имеет место и здесь. Когда количество иодного раствора достигнет 9 см³, т. е. при отношении $\frac{9 \text{ см}^3}{1.5} = 6$, наступает резкое увеличение вязкости раствора.



Фиг. 1.

Не вдаваясь в более подробные объяснения найденной закономерности, можно считать установленным, что в растворе присоединение иода к крахмалу протекает в две фазы. Первая — присоединение иода к крахмалу не меняет вязкости раствора и вторая фаза, наступающая после прибавления к крахмальному раствору определенного количества иода, характеризуется все возрастающей вязкостью раствора по мере прибавления к нему иода. Эта смена фаз в реакции присоединения иода к крахмалу, как указано выше, зависит только от отношения между количеством крахмала, находящегося в растворе, и количеством прибавленного к нему иода, и совершенно не зависит от концентрации.

Однако эти опыты вызывают возражение следующего рода. Растворимый крахмал, с раствором которого получены эти данные, не представляют собою определенного химического индивидуума, но смесь продуктов разной степени деполимеризации, еще не достаточно изученную. Представлялось поэтому необходимым повторить эти опыты над веществом более или менее определенного химического состава. Для этого был взят раствор амилозы.

II. Соотношение между вязкостью и количеством иода в растворе амилозы

Исходным материалом для получения раствора амилозы был взят рисовый крахмал (Amylum Oryza). Приготовленный по Heininger'у[1] крахмальный раствор разделялся на составные части, согласно указанию автора, центрифугированием в течение получаса. Верхний, прозрачный, слегка опалесцирующий раствор амилозы декантировался от нижнего желатинозного (амилопектина) и фильтровался через плотный фильтр под слабым давлением водоструйного насоса. Про-

[1] Kolloid-Beihefte 35 (1932).

центное содержание вещества в растворе определялось путем выпаривания на водяной бане и высушивания осадка до постоянного веса. Из полученного таким образом раствора для измерения вязкости готовился описанным уже способом раствор амилозы с постоянным содержанием иодистого калия, независимо от концентрации иода. 1 см^3 иодного раствора содержал 6 мг иода.

Полученные данные приведены в табл. 5, 6 и 7.

Таблица 5

№	В 100 см^3 раствора			Вязкость $t = 16.3°$		Коагуляция			
	Амилоза в г	KJ m-mol	J_2 см^3	Время истеч. сек.	t'/t	2 mol-раст. KJ на 100 см^3 раствора в см^3	Время поступления коагуляции	Крахмал в фильтрате	Иод в фильтрате
1	0.395	0.75	—	147	1.245	—	—	—	—
2	0.395	0.75	1	144	1.220	10	Через неск. часов	есть	нет
3	0.395	0.75	2	143	1.212	10	»	»	»
4	0.395	0.75	3	143	1.212	10	»	»	»
5	0.395	0.75	4	153	1.297	5	Через неск. минут	нет	»
6	0.395	0.75	5	160	1.356	5	»	»	»
7	0.395	0.75	6	175	1.483	5	»	»	»
8	0.395	0.75	7	163.5	1.386	5	»	»	»
9	0.395	0.75	8	152.5	1.292	5	»	»	»

Таблиц 6

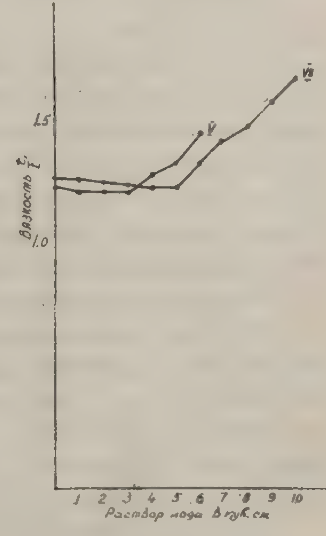
№	В 100 см^3 раствора			Вязкость $t = 17.5°$		Коагуляция			
	Амилоза в г	KJ m-mol	J_2 см^3	Время истеч. сек.	t'/t	2 mol-раст. KJ на 100 см^3 в см^3	Время поступления коагуляции	Крахмал в фильтрате	Иод в фильтрате
1	0.45	0.75	—	143	1.254	—	—	—	—
2	0.45	0.75	1	139	1.219	10	Через неск. часов	есть	нет
3	0.45	0.75	2	138.5	1.215	10	»	»	»
4	0.45	0.75	3	137	1.202	10	»	»	»
5	0.45	0 75	4	137	1.202	10	»	»	»
6	0.45	0.75	5	141	1.237	5	Через неск. минут	следы	»
7	0.45	0.75	6	152	1.333	5	»	нет	»
8	0.45	0.75	7	161	1.412	5	»	»	»
9	0.45	0.75	8	168	1.474	5	»	»	»

Таблица 7

№	В 100 см³ раствора			Вязкость $t = 17.5°$		Коагуляция			
	Амилоза в г	KJ m-mol	J_2 см³	Время истеч. сек.	t'/t	2 mol-раст. KJ на 100 см³ в см³	Время поступления коагуляции	Крахмал в фильтрате	Иод в фильтрате
1	0.0552	0.75	—	149.5	1.289	—	—	—	—
2	0.0552	0.75	1	148.5	1.280	10	Через неск. часов	есть	нет
3	0.0552	0.75	2	147	1.267	10	»	»	»
4	0.0552	0.75	3	146	1.259	10	»	»	»
5	0.0552	0.75	4	145	1.250	10	»	»	»
6	0.0552	0.75	5	145	1.250	10	»	»	»
7	0.0552	0.75	6	157.5	1.358	5	Через неск. минут	следы	»
8	0.0552	0.75	7	165	1.422	5	»	нет	»
9	0.0552	0.75	8	174	1.500	5	»	»	»
10	0.0552	0.75	9	185	1.595	5	»	»	»
11	0.0552	0.75	10	198	1.707	5	»	»	»

Графически соотношение между вязкостью раствора амилозы и количеством прибавленного к нему иода дано на фиг. 2.

Как видно из табл. 5, 6 и 7 и фиг. 2, реакция присоединения иода к амилозе протекает также в две фазы. Единственным отличием от предыдущих опытов является незначительное изменение вязкости в первой фазе по мере прибавления иода. Однако общий характер установленной закономерности сохраняется полностью: после прибавления к раствору амилозы определенного количества иода вязкость резко увеличивается. Причем это изменение вязкости наступает также при довольно близком соотношении между иодом и амилозой.



Фиг. 2.

$$\text{Табл. 5}\ \frac{3\ \text{см}^3\ J_2}{0.395\ \text{г амилозы}} = 7.6,$$

$$\text{табл. 6}\ \frac{4\ \text{см}^3\ J_2}{0.45\ \text{г амилоз}} = 8.9, \qquad \text{табл. 7}\ \frac{5\ \text{см}^3\ J_2}{0.552\ \text{г амилозы}} = 8.9.$$

Следовало бы ожидать, что не только вязкость, но и другие свойства раствора будут различны в обеих фазах реакции. В первую очередь изучена коагуляция иодкрахмала (таблицы 5, 6 и 7).

III. Коагуляция иодкрахмала из раствора амилозы

После определения вязкости раствора амилозы, к которому был прибавлен иод, образовавшийся иодкрахмал коагулировался прибавлением 2-молярного раствора иодистого калия. На следующий день раствор центрифугировался или фильтровался и фильтрат исследовался на содержание иода и крахмала.

Уже процесс коагуляции протекал совершенно различно в обеих фазах реакции. Для коагуляции иодкрахмала в первой фазе требовалась концентрация иодистого калия вдвое большая, чем во второй фазе, коагуляция наступала обычно спустя несколько часов (на следующий день). Коагуляция иодкрахмала во второй фазе наступала сразу, в течение 1—2 минут, при концентрации иодистого калия вдвое меньшей.

Исследование фильтрата после коагуляции иодкрахмала показало, что весь иод связывается крахмалом, так что обнаружить его присутствие в фильтрате не удавалось. Что же касается крахмала, то он присутствует в фильтрате только в первой фазе реакции, начиная с момента соответствующего увеличению вязкости раствора, крахмал в фильтрате отсутствует.

Приведенные опыты дают некоторое основание для суждения о природе изучаемой реакции.

Если стать на точку зрения большинства современных авторов и рассматривать соединение иода с крахмалом как адсорбционное, невозможно объяснить, почему вязкость крахмального раствора, оставаясь постоянной вначале, начинает резко увеличиваться только после прибавления определенного количества иода. Причем это начало увеличения вязкости наступает при строго определенном соотношении между обоими компонентами, независимо от их концентрации. Непонятным далее с этой точки зрения является, во-первых, так резко выраженный разный характер коагуляции иодкрахмала в обеих фазах реакции и, во-вторых, присутствие крахмала в фильтрате после коагуляции иодкрахмала только в первой фазе и его отсутствие во второй фазе. Причем обращает на себя внимание полное совпадение в моментах изменения вязкости, изменения устойчивости иодкрахмала по отношению к коагулирующему действию электролитов и присутствие свободного крахмала — все три сказанные фактора меняются при одном и том же соотношении между иодом и крахмалом.

Скорее всего следует поэтому допустить, что в первой фазе присоединение иода к крахмалу идет по типу обычных химических реакций, а образовавшийся первично иодкрахмал при избытке иода способен адсорбировать, давая новый раствор с совершенно новыми свойствами.

Следует указать, что эти выводы ни в какой мере не противоречат экспериментальным данным авторов, отстаивающих взгляд на иодкрахмал, как на адсорбционное соединение.

Из приведенных нами опытов следует, что первая фаза реакции соединения иода с крахмалом заканчивается, когда 1 г крахмала (растворимого) присоединит 38.4 мг иода, или 1 г амилозы около 53.4 мг иода, в дальнейшем идет адсорбционное соединение. Если обратить внимание на количество иода, который прибавляется к раствору крахмала в работах других авторов, то из наиболее обстоятельных работ Lottermoser'а с сотрудниками, видно, что наименьшее количество иода, приходившееся на 1 г крахмала в их работах составляет не менее 150 мг. И потому естественно, что при таком соотношении между иодом и крахмалом имел место адсорбционный процесс, не говоря уже о работе над крахмальными зернами, где количество иода было еще больше.

Выводы

1. Исследовано изменение вязкости крахмального раствора в зависимости от количества прибавленного к нему иода и найдено, что вязкость раствора остается постоянной до тех пор, пока к раствору не будет добавлено определенное количество иода, после чего вязкость резко возрастает. То же соотношение найдено и для раствора амилозы.

2. Это изменение вязкости наступает при постоянном соотношении между иодом и крахмалом, независимо от концентрации обоих компонентов.

3. Параллельно изменению вязкости изучена коагуляция иодкрахмала из раствора амилозы и установлено, что устойчивость иодкрахмала по отношению к коагулирующему действию электролитов резко понижается с того момента, когда начинает возрастать вязкость.

4. Исследование фильтрата после коагуляции показало, что весь иод связывается крахмалом. Что же касается крахмала, то он присутствует в фильтрате только при тех концентрациях, при которых вязкость остается постоянной.

5. На основании своих опытов автор приходит к выводу, что вначале присоединение иода к крахмалу происходит по типу обычных химических реакций, а затем образовавшийся иодкрахмал адсорбирует находящийся в растворе иод.

Тема настоящей работы дана мне академиком В. А. Кистяковским и выполнена под его руководством. Пользуюсь приятным случаем выразить глубокоуважаемому Владимиру Александровичу мою искреннюю благодарность.

S. NEDZVETSKIJ. SUR LA QUESTION DE LA LIAISON D'IODE AVEC AMIDON

RÉSUMÉ

1. Les recherches faites pour déterminer la dépendance de la viscosité d'une solution d'amidon en rapport à la quantité d'iode ajoutée en dissolution ont prouvé que la viscosité de la solution aminée reste constante jusqu'à un certain pourcentage d'iode pour augmenter très rapidement à partir de ce point. La même dépendance se voit dans la solution amylose.

2. Ce changement de viscosité a lieu à une relation déterminée d'amidon et d'iode, mais non en rapport au degré de concentration des components.

3. Parallèlement au changement de la viscosité, il faut étudier la coagulation de l'iodamidon d'une solution d'amylose et il fut établi que la stabilité de l'iod-amidon envers l'action coagulatrice de l'électrolyte tombe rapidement aussitôt que la viscosité augmente.

4. L'analyse du filtrate après la coagulation démontre que l'iode se lie entièrement à l'amidon, quant à l'amidon il se retrouve dans le filtrate seulement dans les concentrations d'iode pour lesquelles la viscosité reste constante.

5. Se basant sur ses expériences l'auteur conclut qu'au debut la liaison de l'iode à l'amidon se fait comme lors d'une réaction chimique ordinaire tandis que l'iodamidon formé pendant cette réaction absorbe ensuite l'iode contenu dans la solution.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

КОРРОЗИЯ ЖЕЛЕЗА ПРИ КОНТАКТЕ С ГРАНИЦЕЙ: ЭЛЕКТРОЛИТ И ОРГАНИЧЕСКИЕ ВЕЩЕСТВА

А. Н. СТРЕЛЬНИКОВА и Д. И. МИРЛИСА

(Представлено академиком **В. А. Кистяковским***)*

Работа в данной ее части посвящена выяснению причин усиленной коррозии и предохранению от нее нефтеналивных судов, подвергающихся попеременному действию нефтепродуктов и морской воды.

Если по коррозии железа в морской воде, а также по коррозии железа в продуктах перегонки нефти имеется целый ряд работ, получивших свое отражение в литературе, то по затрагиваемой нами теме, помимо работ акад. Кистяковского,[1] никаких других литературных данных почти нет.

В нижеприводимой работе изучались следующие факторы:

1) Влияние предварительной обработки железа нефтепродуктами (бензин, керосин, нефть) на коррозию его в воде и в 3% растворе хлористого натрия.

2) Влияние силиката натрия на коррозию железа в указанных средах под слоем нефтепродуктов.

3) Влияние характера поверхности железа на его коррозию в тех же условиях.

4) Коррозия железа в синтетической океанской и в морской воде в присутствии силиката натрия под слоем керосина.

5) Электродные потенциалы железа при контакте с границей: электролит — органическое вещество.

Опыты производились при комнатной температуре 13—16° С. Ставились они так, что одна половина образца, подвешенного на стеклянной палочке, находилась в воде (или 3% растворе NaCl), другая — в бензине (керосине, нефти). Величина поверхности образцов, приходящая в соприкосновение с электролитом, была примерно одинаковой. Одинаковой была и обработка образцов шлифным напильником. Перед опытом образцы обезжиривались в эфире. Размеры коррозии определялись по потере в весе образца. Результаты опытов приведены в табл. 1.

[1] «К методам изучения проблемы коррозии металлических частей нефтеналивных судов» и «Коррозия при контакте с границей двух фаз».

Применявшиеся для опытов — железо, бензин, керосин и нефть имели следующий химический состав:

Железо	Бензин	Керосин	Нефть
Si=0.047 %	Уд. вес (15°) 0.697	Уд. вес 0.8342 при 15° C	Уд. вес 0.8934 при 15° C
=0.026	Нач. темп. кип. 38.3		
Mn=0.888	Содерж. серы 0.1 %	Нач. темп. кип. 124° C	Нач. темп. кип. 140° C
C=0.26			
P=0.097		Содерж. серы 0.96%	Содерж. серы 1.01 %

Из табл. 1 видно, что предварительная обработка железа бензином не влияет на его коррозию как в воде, так и в 3 % растворе NaCl. То же можно сказать и относительно железа, обработанного керосином, при контакте его с керосином и водой (или 3 % раств. NaCl).

Таблица 1

№ опыта	Условия и среда опыта	Потеря образца в весе в мг на 1 кв. см поверхн. за 48 час.
1	Вода под слоем бензина	0.2
2	Вода под слоем бензина. Образец предварит. обработан бензином	0.3
3	3 % раствор NaCl под слоем бензина	0.5
4	3 % раствор NaCl под слоем бензина. Образец обработан бензином	0.5
5	Вода под слоем керосина	0.2
6	Вода под слоем керосина. Образ. обработан керосином . . .	0.2
7	3 % раствор NaCl под слоем керосина	0.4
8	3 % раствор NaCl под слоем керосина. Образец обработан керосином	0.4
9	Вода под слоем нефти. Образец обработан нефтью	0.0
10	3 % раствор NaCl под слоем нефти, образец обработан нефтью	0.17

Железо, обработанное нефтью в воде под слоем нефти, за время опыта (15 дней) не корродировало совершенно (см. оп. № 9). В 3 % растворе NaCl в тех же прочих условиях — корродировало незначительно (см. оп. № 10). Обращает внимание относительно более сильная коррозия железа при контакте с бензином, сравнительно с таковой при контакте железа с керосином и нефтью. Это может быть объяснено тем, что в опыте с бензином, в соприкосновение со второй фазой (вода, 3 % раств. NaCl) приходит относительно обезжиренная поверхность железа, легко поражаемая коррозией; в случае же керосина и нефти, эта поверхность железа покрыта адсорбционным слоем поверхностно-активных веществ (в особенности это относится к нефти), который отделяет его поверхность от электролита и задерживает тем самым возникновение коррозионных очагов.

Влияние силиката натрия на коррозию железа в указанных выше средах под слоем нефтепродуктов

В качестве задерживающего коррозию вещества был взят силикат натрия, который в последнее время получил применение в Северо-Американских Соединенных Штатах для предохранения водоносных труб от коррозии.

Защитное действие растворов, содержащих силикат натрия, основано на том, что при соприкосновении с железом, поверхность последнего покрывается гелем кремневой кислоты в щелочной среде.

Опыты, поставленные для выяснения характера влияния Na_2SiO_3 как защитного от коррозии агента, дали следующие результаты (см. табл. 2).

Таблица 2

№ опыта	Среда и условия опыта	Потеря образца в весе в мг за 48 час	Потеря образца в весе в мг на 1 кв. см за 48 час.
1	3 % раствор NaCl под слоем бензина	2.2	0.55
2	3 % раствор NaCl + 0.1 % Na_2SiO_3 под слоем бензина	1.4	0.35
3	3 % раствор NaCl под слоем керосина	1.7	0.42
4	3 % раствор NaCl в присутствии 0.1 % Na_2SiO_3 под слоем керосина	0 7	0.17
5	3 % раствор NaCl под слоем нефти	Потеря образ. в весе в мг за 15 суток 3.3	Потеря обр. в весе в мг на 1 кв. см за 15 суток 0.8
6	3 % раствор NaCl в присутствии 0.1 % Na_2SiO_3 под слоем нефти	1.7	0.42

Примечание. Образцы обрабатывались в опытах №№ 1 и 2 — бензином, в опытах №№ 3 и 4 — керосином, в опытах №№ 5 и 6 — нефтью.

Из табл. 2 видно, что в большей мере защитное действие Na_2SiO_3 сказывается на образцах, находившихся под слоем керосина и нефти и обработанных предварительно ими.

Это отчасти понятно, если принять во внимание, что в данном случае имеется эффект суммарного защитного действия, с одной стороны, силиката натрия, с другой — пленок керосина и нефти.

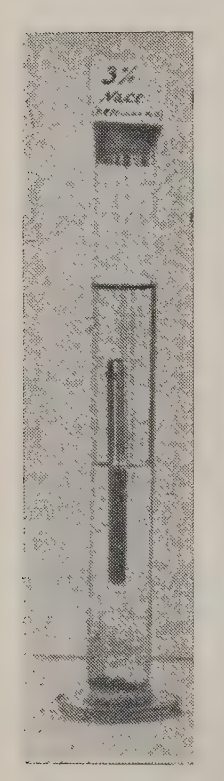
В виду того, что данные табл. 2 получены для небольшого промежутка времени, были поставлены опыты по коррозии железа в воде и в 3 % растворе NaCl под слоем нефтепродуктов, и в этих же средах, в присутствии силиката натрия различной концентрации в течение более продолжительного времени. Обработка образцов производилась точно так же, как и в предыдущих опытах.

Результаты произведенных опытов изложены в следующей таблице:

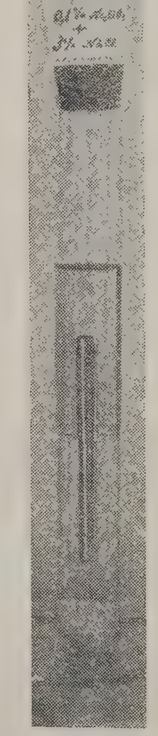
Таблица 3

№ опыта	Среда и условия опыта	Потеря обр. в весе в мг за 3 мес. 26 дн.	Потеря обр. в весе в мг по 1 кв. см за 3 мес. 26 дн.	Относ. велич. корроз. в %	Защитн. фактор
1	3 % раствор NaCl под слоем бензина	99.4	12.68	100	1.0
2	3 % раствор NaCl в присутствии 0.1% Na_2SiO_3 под слоем бензина	54.8	6.98	55	1.8
3	3 % раствор NaCl под слоем керосина	67.8	8.64	100	1.0
4	3 % раствор NaCl в присутствии 0.1% Na_2SiO_3 под слоем керосина	31.6	4.02	46.5	2.1
5	3 % раствор NaCl под слоем нефти	52	6.62	100	1.0
6	3 % раствор NaCl в присутствии 0.1% Na_2SiO_3 под слоем нефти	20.8	2.64	40	2.5

Примечание. Образцы обрабатывались в опытах №№ 1 и 2 — бензином, в оп. №№ 3 и 4 — керосином, в оп. №№ 5 и 6 — нефтью. Поверхность образца обрабатывалась шлифным напильником.



Фиг. 1. 3% раствор NaCl.



Фиг. 2. 3% раствор NaCl+0.1% Na_2SiO_3.

Сравнивая данные табл. 2 и 3, можно сказать, что фактор времени не отразился заметным образом на относительной величине коррозии железа в вышеприведенных условиях. Характер изменения коррозии виден из фотографий (фиг. 1 и 2).

Влияние обработки поверхности железа на его коррозию

Для выяснения влияния характера поверхности железа на его коррозию в тех же условиях были поставлены опыты, во-первых, с образцами, обработанными шлифным напильником, во-вторых — с образцами со шлифованной поверхностью.

Последние приготовлялись следующим образом: прутковое железо обрабатывалось на токарном станке, где с него снимался верхний слой толщиною в 2—3 мм для уничтожения коррозионных очагов, и затем разрезалось на образцы длиною 100 мм и диам. 5 мм, которые шлифовались до зеркальной поверхности.

Результаты испытаний приведены в табл. 4.

Табл. 4 с достаточной ясностью подтверждает значение, которое придается состоянию поверхности металла в деле борьбы с его коррозией.

Наиболее эффективным, в смысле снижения коррозионных потерь оказалось, как это видно из опыта № 6, табл. 4, одновременное воздействие силиката натрия и пассивирование железа шлифованием. Суммарный эффект защитного действия указанных факторов свел потери до крайне малых величин.

Установленное здесь положение суммарного эфекта механическим пассивированием и воздействием защитных веществ вполне согласуется с высказанным по этому поводу мнением акад. В. А. Кистяковского.

Таблица 4

№ опыта	Условия обработ. поверхн. образца	Среда и условия опыта	Потеря обр. в весе в мг за 3 мес. 26 дн.	Потери обр. в весе в мг на 1 кв. см за 3 мес. 26 дн.	Относит. величина коррозии в %	Защитный фактор
1	Обраб. напильн.	3% раствор NaCl под слоем керосина	67.8	8.64	100	1.0
2	Шлифов.	3% раствор NaCl под слоем керосина	47 5	6	70.0	1.4
3	Обраб. напильн.	3% раствор NaCl в присутствии 0.01% Na_2SiO_3 под слоем керосина . .	51.7	6.58	100	1.0
4	Шлифов.	3% раствор NaCl в присутствии 0.01% Na_2SiO_3 под слоем керосина .	43.2	5.5	83.5	1.2
5	Обраб. напильн.	3% раствор NaCl в присутствии 0.1% Na_2SiO_3 под слоем керосина . .	31.6	4.02	100	1.0
6	Шлифов.	3% раствор NaCl в присутствии 0.1% Na_2SiO_3 под слоем керосина . .	0.5	0.07	1.7	59
7	Обраб. напильн.	0.1% раствор Na_2SiO_3 под слоем керосина	14.3	3.96	100	1.0
8	Шлифов.	0.1% раствор Na_2SiO_3 под слоем керосина . .	0.8	0.1	2.5	40

Примечание. Образцы обрабатывались перед опытом керосином.

В работе «К методам изучения проблемы коррозии металлических частей нефтеналивных судов», стр. 244, примеч. 2-е, акад. В. А. Кистяковский пишет: «Мои новейшие наблюдения показали, что пассивирующаяся пленка, хотя и разрушается ионом хлора, но в известных условиях может все же задержать коррозию от действия хлоридов».

Влияние концентрации силиката натрия на коррозию железа в дистиллированной воде (под слоем керосина)

Был исследован интервал концентраций Na_2SiO_3 от 0.01% до 0.2%. Объектом испытания служили отшлифованные железные образцы. Результаты испытаний приведены в табл. 5.

Таблица 5

№ опыта	Среда и условия опыта	Потеря обр. в весе мг за 5 мес.	Потеря обр. в весе в мг на 1 кв. см. за 5 мес.	Относит. величина коррозии в %	Защитн. фактор
1	0.01% раствор Na_2SiO_3	49.7	6.3	100	1.0
2	0.03 » »	40.3	5.1	80.09	1.2
3	0.07 » »	34.6	4.4	69.84	1.4
4	0.08 » »	13.8	1.75	27.77	3.6
5	0.09 » »	1.1	0.14	2.22	45.0
6	0.1 » »	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.2 » »	0.0	0.0	0.0	0.0

Примечание. Образцы обрабатывались перед опытом керосином.

Наблюдения за ходом коррозии в опытах №№ 1 и 2 показали быстрое разрушение поверхности полированных образцов у границы раздела электролит — керосин (см. в конце статьи иллюстр. табл. I, 1).

Это явление, объясняемое, согласно фильмовой теории акад. В. А. Кистяковского,[1] нарушением эквипотенциальности поверхности границей раздела электролит — керосин, уменьшается по мере увеличения концентрации Na_2SiO_3 в растворе (табл. I, 2) и совершенно исчезает на образцах, соприкасающихся с 0.1% раствором Na_2SiO_3 (табл. I, 3). Из опыта № 6 табл. 5 видно, что железо в этом растворе не корродирует.

Коррозия железа в синтетической океанской воде в присутствии силиката натрия под слоем керосина

Состав синтетической океанской воды (по Форхгамеру):

NaCl	...... 26.9 г	78.32% весов.
$MgCl_2$	.... 3.2 »	9.44 »
KCl	.... 0.6 »	1.69 »
$MgSO_4$	.... 2.2 »	6.40 »
$CaSO_4$	.... 1.3 »	3.94 »

[1] В. А. Кистяковский. Коррозия железа при контакте двух фаз. 1932.

Химический состав железа, которым мы пользовались для опытов с синтетической океанской и морской водой, был следующий (в %):

$$
\begin{aligned}
Si &= 0.047\\
S &= 0.01\\
Mn &= 0.15\\
C &= 0.1\\
P &= 0.011
\end{aligned}
$$

Результаты опытов по коррозии железа при контакте с синтетической океанской водой, содержащей различные концентрации Na_2SiO_3 и керосином приведены в табл. 6.

Таблица 6

№ опыта	Среда и условия опыта	Потеря обр. в весе в мг за 21 день	Потеря обр. в весе в мг на 1 кв. см за 21 день	Относит. величина коррозии в %	Защитн. фактор
1	Синтет. океанск. вода	13.1	2.38	100	1.0
2	» » » + 0.05% Na_2SiO_3	5.5	1	42	2.4
3	Синтет. океанск. вода + 0.1% Na_2SiO_3	4.5	0.82	34.4	2.9
4	Синтет. океанск. вода + 0.2% Na_2SiO_3	2.8	0.51	21.4	4.7
5	Синтет. океанск. вода + 0.4% Na_2SiO_3	2.6	0.47	19.8	5.0
6	Синтет. океанск. вода + 0.6% Na_2SiO_3	2.4	0.43	18	5.5
7	Синтет. океанск. вода + 0.8% Na_2SiO_3	2.6	0.47	19.8	5.0
8	Синтет. океанск. вода + 1% Na_2SiO_3	2.5	0.45	19	5.2

Примечание. Все образцы перед опытом обрабатывались керосином.

Как видно из табл. I, 3, изображающей коррозию железа в синтетической океанской воде под слоем керосина (оп. № 1, табл. 6), большая часть поверхности образца, соприкасающаяся с синтетической водой, имеет общую коррозию. Особенно сильно корродирует поверхность образца, непосредственно прилегающая к границе раздела: синтетическая вода — керосин. Коррозия в этом месте имеет глубокий кольцеобразный характер и вызывается, как выше было сказано, нарушением эквипотенциальности поверхности железа границей электролит — керосин.

Введение в синтетическую воду силиката натрия уменьшает размеры коррозии и изменяет ее характер (см. фиг. 3 и 4). Вместо сплошной коррозии по всей поверхности появляются отдельные точечные очаги ее, число которых и величина их уменьшаются по мере повышения концентрации силиката натрия до некоторого оптимального значения ее, в данном случае до 0.6%, отвечающего минимуму коррозионных потерь (см. оп. № 6, табл. 6, фиг. 5).

Влияние желатины на коррозию железа в синтетической океанской воде

Для выяснения влияния защитных свойств желатины на коррозию железа в синтетической океанской воде был поставлен ряд опытов по методике, описанной выше. Результаты опытов приведены в табл. 8.

Таблица 8

№ опыта	Условия и среда опыта	Потеря обр. в весе в мг за 21 день	Потеря обр. в весе в мг на 1 кв. см за 21 день	Относ. величина коррозии	Защитн. фактор
1	Синтет. океанск. вода	13.4	2.44	100	1
2	» » » + 0.05 % желатины	10.0	1.82	74.6	1.3
3	» » » + 0.1 % желатины	6.8	1.23	50.4	1.9
4	» » » + 0 4 % желатины	6.6	1.12	46	2.2
5	» » » + 0.6 % желатины	5.8	1.05	43	2.3
6	» » » + 1 % желатины	2.9	0.53	21.7	4.6

В отличие от силиката натрия, который способствует локализации коррозии в синтетической океанской воде, желатина, наоборот, содействует равномерному распределению коррозионного процесса по всей поверхности соприкосновения металла с водой (см. фиг. 9, 10 и 11). Продукты коррозии пептизированы. Повышение концентрации желатины от 0.4 до 1 % уменьшает коррозию, но в меньшей степени, чем это имеет место при силикате натрия.

Электродные потенциалы железа при контакте его с границей двух фаз

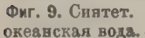
(электролит — керосин, бензин)

Принимая во внимание, что коррозионная способность металла определяется его электродным потенциалом, представляло интерес выяснить эту зависимость путем определения электродных потенциалов железа в растворах с различной концентрацией защитного вещества и без такового.

Измерения электродных потенциалов железа были произведены в воде, в 3 % растворе хлористого натрия и в морской воде с силикатом натрия и без него.

Как видно из нижеследующих результатов измерений, повышение концентрации силиката натрия в растворе, сопровождаемое уменьшением коррозионных потерь, влечет за собой возрастание потенциала железа (принятие им более электроположительного значения), т. е. переход его в менее активное состояние. Так, в 0.1 % растворе Na_2SiO_3, в котором, как это было видно из табл. 5 опыта № 6, коррозии железа не наблюдается, потенциал железа принимает значение равное — 0.2242 b (см. табл. 9, опыт № 3). То же самое мы видим и на примере





Фиг. 9. Синтет. океанская вода.



Фиг. 10. Синт. океанск. вода + 0.2 % желатина.



Фиг. 11. Синт. океанск. вода + 0.6 % желатина.

с морской водой в присутствии силиката натрия. Здесь также при концентрации Na_2SiO_3 0.8 %, соответствующей минимальной коррозионной потере, наблюдается более благородный потенциал — 0.2444 b, что видно из табл. 9, опыт № 9.

Таблица 9

№ опыта	Среда и условия опыта	Электродный потенциал	Примечание
1	Вода	— 0.4261	Измерения во всех опытах производились под слоем керосина
2	Вода + 0.01 % Na_2SiO_3	— 0.4054	
3	Вода + 0.1 % Na_2SiO_3	— 0.2242	
4	3 % раствор NaCl	— 0.4173	
5	3 % раствор NaCl + 0.01 % Na_2SiO_3	— 0.4074	
6	Морская вода	— 0.4971	
7	Морская вода + 0.2 % Na_2SiO_3	— 0.3842	
8	Морская вода + 0.8 % Na_2SiO_3	— 0.2444	

Выводы

На основании опытного материала данной работы, в согласии с фильмовой теорией акад. В. А. Кистяковского можно совершенно точно сказать, что ни бензин, ни керосин, ни нефть, сами по себе, при низких температурах металла не корродируют. Причиной же коррозии всегда является электролит.

И если в электролите, под слоем бензина, коррозионный процесс железа, обработанного бензином, несколько активнее, чем у железа, обработанного керосином и нефтью, то это необходимо объяснить тем, что в первом случае в соприкосновение с электролитом приходит относительно обезжиренная поверхность железа, легко поражаемая коррозией, в случае же керосина и нефти эта поверхность покрыта адсорбционным слоем поверхностно-активных веществ, который отделяет его поверхность от электролита и задерживает тем самым возникновение коррозионных центров.

В особенности это относится к нефти, слой которой, нанесенный на железо до соприкосновения его с электролитом, может служить защитой от коррозии.

Коррозия железа, особенно интенсивная в месте соприкосновения его с границей раздела электролит — нефтепродукты, не наблюдается совсем или наблюдается в незначительной степени, если в электролите присутствует достаточное количество силиката натрия (0.1—0.8%).

Уменьшение коррозионной способности железа с возрастанием концентрации силиката натрия в электролите может быть объяснено, как это видно из данных табл. 9, переходом железа в менее активное состояние, т. е. принятием им более благородного (более электроположительного) значения потенциала (—0.2242 b).

В заключение считаем своим приятным долгом поблагодарить акад. В. А. Кистяковского за ценные указания и постоянный интерес к работе.

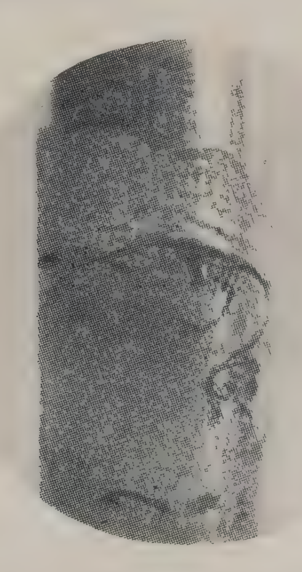
ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Кистяковский. К методам изучения проблемы коррозии металлических частей нефтеналивных судов. ДАН-А, стр. 239—244, 1931.
2. В. А. Кистяковский. Коррозия железа при контакте с границей двух фаз. Труды июньской сессии Акад. Наук СССР, стр. 9—18, 1932.
3. I. G. Vail. I. Soc. Chem. Ind., 44 (1925).
4. I. R. Evans. Trans. Liverpool Eng. Soc. 1926.

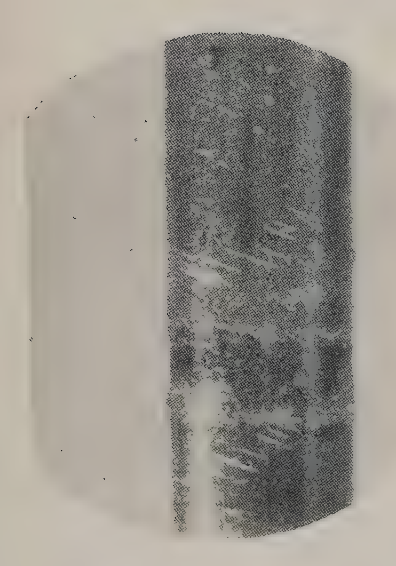
A. STRELNIKOFF und D. MIRLISS. DIE KORROSION DES EISENS BEI DEM KONTAKT MIT DEM GRENZE: ELEKTROLYT UND DIE ORGANISCHEN STOFFE (ERDÖL, PETROLEUM, BENZIN)

ZUSAMMENFASSUNG

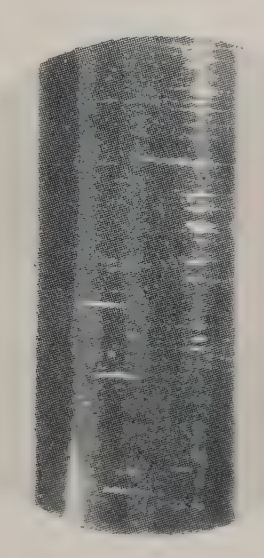
Bei niedrigen Temperaturen korrodiert an und für sich das Benzin, Petroleum und Erdöl das Eisen nicht. Das Elektrolyt ist immer die Ursache der Korrosion. Die Korrosion des Eisens nimmt ab oder ist völlig abwesend, wenn in dem Elektrolyt hinreichende Menge des Natriumsilicats vorhanden ist. Die Korrosionsfähigkeit des Eisens vermindert sich bei Zunahme der Konzentration von Natriumsilicat im Elektrolyt was sich durch Annahme von elektropositiveren Potenzial (—0.2242 v.) erklärt — d. h. durch Übergang des Eisens in inaktiveren Zustand.



1. Дистилл. вода + 0.01 % Na_2SiO_3.



2. Дистилл. вода + 0.08 % Na_2SiO_3.



3. Дистилл. вода + 0.09 % Na_2SiO_3.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

КАТАЛИТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ ПЛАТИНЫ И MnO_2 НА ПЕРЕКИСЬ И ГИДРОПЕРЕКИСЬ БЕНЗОИЛА

Ф. И. БЕРЕЗОВСКОЙ и О. СЕМИХАТОВОЙ

(*Представлено академиком* Л. В. Писаржевским)

Часть первая

Работа начата по предложению академика Л. В. Писаржевского в связи с изучением катализа H_2O_2 в абсолютном эфире.

Так как в результате каталитического разложения H_2O_2 по схеме $H_2O_2 +$ + (катал.) $\rightarrow H_2O + O$ появляется H_2O, то абсолютный эфир оводняется.

Поэтому и были выбраны объектом для изучения катализа в абсолютном эфире органические перекиси. Попутно представлялся интерес изучить вопрос о возможности каталитического разложения ацильных перекисей, не наблюдаемого до сих пор. В связи с этим для реакции выбраны перекись и гидроперекись бензоила.

П о с т а н о в к а о п ы т а. Определенная навеска перекиси бензоила (0.3 г) растворялась в 20 см^3 растворителя и подвергалась действию катализатора. Через определенные промежутки времени количество оставшейся неразложенной перекиси определялось титрованием гипосульфитом.

К а т а л и з а т о р. Изучалось действие Pt и MnO_2 на перекись бензоила. Pt употреблялась в двух видах: 1) платиновая пластинка 50 × 10 мм свеже платинированная; 2) губчатая платина. MnO_2 — мелкий порошок черного цвета (Kahlbaum).

Растворитель — эфир в следующих видах: 1) эфир абсолютный, 2) эфир отмытый от спирта, 3) эфир обыкновенный (водный), 4) эфир специально обводненный.

В табл. 1 приведены результаты опытов с различными растворителями.

В пояснение к приведенным опытам нужно заметить:

1) Сам эфир выделяет некоторое количество J_2 из $K^{\cdot}J'$ (в зависимости от сорта эфира количество $Na_2S_2O_3$, пошедшее на титрование J_2, выделяемого

Таблица 1

Результаты опытов катализа перекиси бензоила с различными растворителями. Катализатор Pt
Versuchsergebnisse der Katalyse von Benzoylperoxyd mit verschiedenen Lösungsmitteln. Katalysator Pt

№ опыта V r-suchs-nummer	Навеска Einwage	Время Zeit	Растворитель Lösungsmittel	Катализатор Katalysator	Среднее колич. $Na_2S_2O_3$, пошед. на титров. Im Mittel verbraucht zur Titration $Na_2S_2O_3$	Количество перекиси бенз. соотв. затрач. гипосульф. Verbrauchtes Thiosulfat entspricht der Menge Benzoylperoxyd. Die Menge Benzoyl peroxyd, die dem Thiosulfat entspricht	Средний % разлож. перекиси бензоила Im Mittel zersetzt Benzoylperoxy (%)	t° плавл. сух. остатка Schmelzpunkt d. festen Rückstandes	t° плавления компонентов / Schmelzpunkte d. Kompnenten: Раствор. в воде Lösl. in Wasser	Не раствор. в воде Unlösl. in Wasser
1, 2, 3	0.3	24	Эф. обыкн.	Pt	18.7	0.226457	24.9			
	0.3	24	» »	без кат.	24.9	0.301539	—			
4, 9	0.3	48	» »	Pt	16.9	0.204659	33.2	100°		
	0.3	48	» »	без кат.	25.3	0.306383	—	104°		
5	0.3	72	» »	Pt .	16.0	0.193760	37.8			
	0.3	72	» »	без кат.	25.3	0.306383	—			
6, 7, 8, 9, 10	0.3	144	» »	Pt	14.3	0.173173	44.1	90°	121°	104°
11	0.3	144	» »	без кат.	25.6	0.310016	—	104°		
12, 13	0.3	24	Эф. абс.	Pt	25.9	0.313649	0			
	0.3	24	» »	без кат.	25.9	0.313649	—			
15, 16	0.3	72	» »	Pt	25.5	0.309805	0	104°		
17, 18	0.3	46	Эф. пром. от спирт.	Pt	18.3	0.22613	27.9			
	0.3	46	» »	без кат.	25.4	0.307594	—			
19	0.3	48	» »	Pt	16.9	0.204659	33.5			
	0.3	48	» »	без кат.	25.4	0.307594	—			
20	0.3		» »	Pt	—	—	9%	90°	122°	104°
21	0.3	24	Эф. обвод.	Pt	18.8	0.227618	26.1			
	0.3	24	» »	без кат.	25.35	0.306988	—			
22	0.3	48	» »	Pt	16.5	0.199815	34.91			
	0.3	48	» »	без кат.	25.35	0.306988	—			
23	0.3	96	Тверд.	Pt губч.	20.2	0.244622	18.2			
	0.3	96	»	без кат.	24.7	0.299117	—			
24	0.3	288	»	Pt губч.	10.5	0.127155	57.5			
25	0.3	216	»	Pt губч.	выделяющ. газ поглощался пирогаллом					
26	0.3	144	»	Pt губч.	—	—	—	100°		

20 см³ эфира колеблется от 0.6 до 2.0 см³). Мы это явление приписываем присутствию в эфире перекиси этила.

2) Исходя из вышеуказанного свойства растворителя, процент разложившейся перекиси рассчитан не на исходную навеску (0.3 г), а на количество перекиси, соответствующее кубическим сантиметрам $Na_2S_2O_3$, пошедшего на титрование контрольного опыта. Этим уменьшается ошибка.

3) При употреблении в качестве растворителя эфира, содержащего спирт, не удавалось установить при катализе выделение газа. При употреблении эфира, отмытого от спирта, наблюдалось выделение газа (до 18 см³), поглощаемого пирогаллолом.

4) Параллельно с титрованием измерение перекиси бензоила контролировалось температурой плавления остатка после катализа, получаемого отгонкой растворителя.

Разделение сухого остатка дало возможность определить в водной вытяжке бензойную кислоту (t° плавления 121—122°) и в остатке неизмененную перекись бензоила (t° плавления 104°). Суммируя вышеприведенные данные, мы можем констатировать:

1. Зависимость каталитического действия от времени (табл. 2).

2. Влияние растворителя (табл. 3).

3. Наличие каталитического действия без растворителя (опыты №№ 23, 24, 25, 26, табл. 1).

Таблица 2

№ опыта Versuchsnummer	Время Zeit	Количество Verbrauch an $Na_2S_2O_3$	% разложения Zersetzungsgrad (%)
1	24	18.5	26.23
4	48	16.9	33.17
5	72	16.0	37.9
6	144	14.5	42.7

Таблица 3

№ опыта Versuchsnummer	Время Zeit	Растворитель Lösungsmittel	Количество Verbrauch an $Na_2S_2O_3$	% разлож. Zersetzungsgrad (%)
1	24	Эфир обыкн.	18.5	26.23
12	24	» абсол.	26.6	0
5	72	» обыкн.	16.0	37.8
15	72	» абсол.	25.7	0

Часть вторая

Вторая часть работы посвящена была изучению каталитического действия MnO_2 на перекись бензоила, а также действия Pt и MnO_2 на гидроперекись бензоила.

После установления факта каталитического действия Pt на перекись бензоила было очень интересно проверить действие и другого типичного для H_2O_2 катализатора MnO_2. Однако, как указывают нижепроведенные опыты, нам не удалось обнаружить каталитического действия MnO_2 ни в растворе, ни в твердом состоянии.

Экспериментальная часть приведена в табл. 4.

Таблица 4

№ опыта Versuchsnummer	Навеска Einwage	Время Zeit	Растворитель Lösungsmittel	Катализатор Katalysator	Количество Verbrauch an $Na_2S_2O_3$	Колич. перекиси бенз. соответ. ушедш. $Na_2S_2O_3$ Dem Varbrauch an Thiosulfat entspricht Benzoylperoxyd $Na_2S_2O_3$	% разложения Zersetzungsgrad (%)	t° плавл. сух. остатка Schmp. d. festen Rückstandes
27	0.3	24	Эфир обыкн.	MnO_2	26.0	0.314860	0	
	0.3	24	» »	без кат.	26.2	0.317282	0	
28	0.3	24	» »	MnO_2	26.4	0.319704	0	
	0.3	24	» »	без кат.	26.2	0.317282	0	104°
29	0.3	46	» »	MnO_2	26.1	0.316071	0	
	0.3	46	» »	без кат.	26.2	0.317282	0	
30	0.3	48	» »	MnO_2	26.3	0.318493	0	
	0.3	48	» »	без кат.	26.2	0.317282	0	104°
31	0.3	288	» »	MnO_2	24.7	0.299117	0	
	0.3	288	» »	без кат.	24.6	0.297406	0	104°
32	0.3	96	Тверд.	MnO_2	26.3	0.313493	0	
33	0.3	288	»	MnO_2	24.6	0.297906	0	
	0.3	288	»	без кат.	24.6	0.297906	0	

Из приведенных опытов с катализатором MnO_2 нужно сделать предварительное заключение, что употребляемый в данных опытах MnO_2 мелкий порошок Kahlbaum'а не производит каталитического разложения перекиси бензола, что подтверждается и неизменившейся температурой плавления сухого остатка после катализа. С первого взгляда подобное отсутствие каталитического действия MnO_2 можно приписать одной из двух причин:

1) Общей неактивности MnO_2, употребляемого в данных опытах.

2) Специфическому действию MnO_2 (гигроскопичность, создающая условия, подобные тем, какие существуют в абсолютном эфире, и т. п.), приводящему раствор перекиси в состояние, препятствующее каталитическому действию.

Для проверки этих предположений ставились контрольные опыты.

1) Для проверки активности MnO_2, последний после удаления эфирного раствора перекиси бензоила опускался в H_2O_2, причем наблюдалось бурное разложение H_2O_2.

2) Для проверки специфичного действия MnO_2 на перекись бензоила были проделаны следующие опыты: 2 равные навески перекиси бензоила (0.3 г) растворялись в 20 см³ обыкновенного эфира и к каждой из них прибавлялось MnO_2 1 г. После 48-часового стояния этих проб одна из них отфильтровывалась от MnO_2 и в фильтрат опускалась платиновая пластинка. Через 48 часов обе порции подвергались титрованию.

Таблица 5

Опыт 38 (Versuch 38)

Навески Einwage	Время Zeit	Растворитель Lösungsmittel	Катализатор Katalysator	Количество Verbrauch an $Na_2S_2O_3$	Количество перекиси бенз. соотв. $Na_2S_2O_3$, ушедш. на титрование Dem Verbrauch an Thiosulfat entspricht Benzoylperoxyd	% разложения Zersetzungsgrad (%)
0.3	96	Эфир обыкн.	MnO_2	24.0	0.29064	—
0.3	48 } 48 } 96	» »	MnO_2 } Pt }	14.5	0.175595	39.6

Таким образом оба эти контрольные опыта заставляют отклонить вышеприведенные предположения: 1) употребляемый в наших опытах порошок MnO_2 обладает обычной активностью по отношению H_2O_2; 2) эфирный раствор перекиси бензоила, подвергаясь действию MnO_2 в течение 48 часов, не теряет своей способности подвергаться каталитическому действию Pt, на что указывает опыт № 38.

Серия VII

Каталитическое действие Pt и MnO_2 на гидроперекись бензоила. Определенное количество кубических сантиметров эфирного раствора гидроперекиси, получаемого по Прилежаеву (ЖРФХО), подвергалось действию катализатора определенное время, после чего остаток неразложившейся гидроперекиси определялся титрованием. Данные даны в табл. 6.

Концентрация раствора гидроперекиси бензоила определялась титрованием. Гидроперекись бензоила в растворе неустойчива и при стоянии разлагается.

Однако присутствие Pt и MnO_2 сильно ускоряет это разложение, причем Pt действует сильнее, чем MnO_2.

Таблица 6

№ опыта Versuchs-nummer	Время Zeit	Катализатор Katalysator	Количество Verbrauch an $Na_2S_2O_3$	Колич. $см^3$ раствора перек. Anzahl cm^3 Benzoylhydroperoxydlösung	Количество оставш. перек. Unzersetzes Hydroperoxyd	% разлож. Zersetzungsgrad (%)
1	24	Без кат.	6.0	10	0.041406	13.7
2	24	» »	6.2	10	0.043040	11.9
3	24	MnO_2	1.5	10	0.010425	78.6
4	24	»	1.8	10	0.012510	74.3
5	24	Pt	0.9	25	0.006255	94.9
6	24	»	1.2	25	0.008340	93.2
7	72	»	0.3	25	0.002085	98.3
8	72	»	0.2	25	0.001390	98.9
9	72	Без кат.	5.4	10	0.037530	22.9
10	72	» »	5.5	10	0.038225	21.9

Выводы

1. Факт каталитического разложения перекиси и гидроперекиси бензоила платиной нужно считать нами установленным, вопреки существующему в литературе мнению.[1]

2. Далее нужно подчеркнуть также установленный нами факт — необходимость присутствия воды для каталитического действия. Этот факт с первого взгляда как будто бы подтверждает существующее в литературе мнение о недеятельности перекиси бензоила.

По мнению Прилежаева[2], все реакции с перекисью бензоила идут через стадию гидролиза ее с образованием гидроперекиси и эта последняя далее вступает в реакцию. Но более глубокое сопоставление экспериментальных данных приводит нас к обратному выводу.

Тот факт, что MnO_2 разлагает гидроперекись бензоила и совершенно не действует на перекись бензоила, кажется нам, окончательно опровергает мнение, что реакция идет через гидроперекись; в противном случае MnO_2, действующий на гидроперекись, вызвал бы разложение перекиси бензоила: подобный механизм реакции должен был бы привести в присутствии катализатора малорастворяющуюся в воде перекись бензоила к постепенному разложению с последующим растворением все новых и новых количеств.

Здесь ясно, что если незначительное количество H_2O, присутствующее в эфире, может вызвать гидролиз, то при взбалтывании с H_2O перекиси бензоила условия гидролиза более вероятны.

[1] A. Bayer und V. Williger. Ber., 33 (2), 1569, 1910.

[2] Н. Прилежаев. ЖРФХО, т. XLI, вып. 8, 1887.

Однако проделанный в этом направлении опыт дал отрицательные результаты.

Поэтому мы считаем возможным отрицать общий механизм реакции через гидроперекись.

3. С особой осторожностью нужно отнестись к обсуждению факта, установленного нами, — отсутствие каталитического действия порошка MnO_2 на перекись бензоила.

Мы лишь констатируем, что употребляемый нами мелкий порошок MnO_2 Kahlbaum'a несмотря на свою активность по отношению к перекиси водорода и гидроперекиси бензоила, проявляет полную неактивность по отношению к перекиси бензоила.

Возможно, что это связано с падением восстановительной способности перекиси бензоила, так как известно, что активность MnO_2 повышается присутствием низших окислов марганца (Mn_2O_3, MnO), которые в данных условиях, в случае перекиси бензоила, образоваться не могут.

На возможность такого толкования указывает также наблюдаемое нами сейчас каталитическое действие MnO_2, получаемого из $KMnO_4$ и $MnSO_4$.

Однако эти опыты носят лишь предварительный характер и составляют задачу дальнейшего изучения этого явления.

Во всяком случае факт отсутствия каталитического действия чистого MnO_2 указывает на специфическую связь химического состава катализатора со строением катализируемого вещества. Это и намечает пути дальнейшего изучения катализа органических перекисей в связи с их строением и химическими свойствами, с одной стороны, и в связи с составом и химическими свойствами катализатора, с другой.

В заключение приносим горячую благодарность академику Л. В. Писаржевскому за постоянное руководство работой и большой интерес к ней.

Институт физической химии
Днепропетровск
14 I 1934 г.

F. BERESOWSKAJA und O. SSEMICHATOWA. DIE KATALYTISCHE WIRKUNG VON PLATIN UND MnO_2 AUF BENZOYLPEROXYD UND BENZOYLHYDROPEROXYD

ZUSAMMENFASSUNG

Teil I

Die Arbeit wurde auf Anregung des Akademikers L. W. Pissarjewsky im Zusammenhang mit dem Studium der Katalyse des H_2O_2 in absolutem Aether aufgenommen.

Da sich bei der katalytischen Zersetzung von H_2O_2 gemäss der Gleichung

$$H_2O_2 + (\text{Katalysator}) \rightarrow H_2O + O$$

Wasser bildet, so wird der Aether im Laufe der Reaktion feucht.

Aus diesem Grunde wurden zum Studium der Katalyse in absolutem Aether organische Peroxyde gewählt. Daneben bot das Studium der Frage, ob sich auch Acylperoxyde katalytisch zersetzen lassen, was bisher noch nicht beobachtet worden war, grosses Interesse. Infolgedessen wurden für die Reaktion Benzoylperoxyd und Benzoylhydroperoxyd gewählt.

Versuchsanordnung: Eine bestimmte Einwage an Benzoylperoxyd (0.3 g) wurden in 20 cm^3 Lösungsmittel gelöst und der Einwirkung des Katalysators ausgesetzt. In bestimmten Zeitabschnitten wurde die Menge unzersetzten Peroxyds durch Titration mit Thiosulfat bestimmt.

Katalysator: Untersucht wurde die Wirkung von Pt und MnO_2 auf Benzoylperoxyd. Das Pt wurde benutzt: 1) als eine frisch platinierte Platinplatte und 2) als Platinschwamm; MnO_2 — in Form eines feinen schwarzen Pulvers (Kahlbaum).

Lösungsmittel: Aether in folgenden Abarten: 1) absoluter Aether; 2) durch Auswaschen vom Spiritus befreiter Aether; 3) gewöhnlicher (feuchter) Aether; 4) speziell verwässerter Aether.

In der Tab. 1 sind die Ergebnisse der Versuche mit verschiedenen Lösungsmitteln zusammengestellt.

Zur Erläuterung der angegebenen Versuche ist noch folgendes zu bemerken:

1) Der Aether setzt selbst eine bestimmte Menge J_2 aus Kj_2 in Freiheit (je nach Qualität des Aethers schwankte die Anzahl zur Titration von 20 cm^3 Aether verbrauchten cm^3 $Na_2S_2O_3$ zwischen 0.6 bis 2). Wir führen dies auf einen Gehalt des Aethers an Aethylperoxyd zurück.

2) Von der oben angegebenen Eigenschaft des Lösungsmittels ausgehend, berechneten wir den Prozentsatz des zersetzten Peroxyds nicht aus der Einwage (0.3 g), sondern aus der Menge Peroxyd, die dem Verbrauch an $Na_2S_2O_3$ zur Titration eines Parallelversuches entsprechen. Damit wird der Fehler verringert.

3) Benutzte man als Lörungsmittel einen Alkohol enthaltenden Aether, so konnte bei der Katalyse keine Gasentwicklung festgestellt werden. Bei Verwendung eines Aethers, aus dem der Alkohol ausgewaschen war, wurde ein Gas entwickelt (bis 18 cm^3), das von Pyrogallol absorbiert wurde.

4) Parallel mit der Titration wurde die Veränderung des Benzoylperoxyds durch Bestimmung des Schmelzpunktes des nach Abdestillieren des Lösungsmittels hinterbleibenden Restes kontrolliert.

Die Trennung des trockenen Rückstandes ermöglichte es, im wässerigen Auszug Benzoesäure (Schmp. 121—122°) und im Rückstand davon unverändertes Benzoylperoxyd (Schmp. 104°) nachzuweisen. Summieren wir obige Angaben, so kann folgendes festgestellt werden:

1) Die Abhängigkeit der katalytischen Wirkung von der Zeit (Tab. 2).[1]

2) Der Einfluss des Lösungsmittels (Tab. 3).

3) Das Vorhandensein einer katalytischen Wirkung ohne Lösungsmittel (Versuche 23, 24, 25, 26, Tab. 1).

Teil II

Der zweite Teil der Arbeit war der Untersuchung der katalytischen Wirkung von MnO_2 auf Benzoylperoxyd, sowie von Pt und MnO_2 auf Benzoylhydroperoxyd gewidmet.

[1] Tabellen siehe in russischer Text.

Nachdem die Tatsache einer katalytischen Wirkung von Pt auf Benzoylperoxyd feststand, war es von Interesse die Wirkung eines anderen, für H_2O_2 typischen Katalysators, des MnO_2, zu prüfen. Doch konnten wir, wie aus den unten aufgeführten Versuchen zu ersehen ist, keine katalytische Wirkung des MnO_2, sowohl in Lösung, als auch in festem Zustand feststellen. Der experimentelle Teil ist in Tab. 4 angegeben.

Aus den angeführten Versuchen mit MnO_2 als Katalysator muss der vorläufige Schluss gezogen werden, dass das dabei benutzte MnO_2, ein feines Pulver von Kahlbaum, keine katalytische Zersetzung des Benzoylperoxyds bewirkt, was auch durch den unveränderten Schmelzpunkt des trockenen Rückstandes nach der Katalyse bestätigt wird. Auf den ersten Blick kann man dieses Fehlen einer katalytischen Wirkung des MnO_2 einem der beiden folgenden Gründe zuschreiben:

1) Einer allgemeinen Inaktivität des bei den Versuchen benutzten MnO_2.

2) Einer spezifischen Wirkung des MnO_2 (Hygroskopizität, die Bedingungen, ähnlich denen in absolutem Aether erzeugt), die die Lösung zu einem Zustand führt, bei dem eine weitere katalytische Wirkung verhindert wird.

Zur Prüfung dieser Annahmen wurden Kontrollversuche angesetzt.

1) Um die Aktivität des MnO_2 festzustellen, wurde dieses nach Entfernung der ätherischen Lösnng des Benzoylperoxyds zu H_2O_2 gegeben, wobei stürmische Zersetzung beobachtet wurde.

2) Zur Prüfung der spezifischen Wirkung des MnO_2 auf Benzoylperoxyd wurden folgende Versuche durchgeführt: 2 gleiche Einwagen an Benzoylperoxyd (0.3 g) wurden in je 20 cm^3 gewöhnlichem Aether gelöst und jeder Lösung 1 gr MnO_2 zugesetzt. Nach 48 stündigem Stehen wurde eine dieser beiden Proben vom MnO_2 abfiltriert und in das Filtrat eine Platinplatte eingetaucht. Nach weiteren 48 Stunden wurden beide Proben titriert. Versuch 38 siehe in Tab. 5.

Damit führen beide Kontrollversuche zur Ablehnung unserer obigen Annahmen: 1) das bei den Versuchen benutzte MnO_2-Pulver besitzt die übliche Aktivität gegenüber H_2O_2; 2) die ätherische Lösung des Benzoylperoxyds verliert nach 48 stündiger Einwirkung des MnO_2 seine Eigenschaft, von Pt katalytisch zersetzt zu werden, nicht, wie dies aus Versuch 38 zu ersehen ist.

Serie VII

Die katalytische Wirkung von Pt und MnO_2 auf Benzoylhydroperoxyd. Eine bestimmte Anzahl cm^3 einer ätherischen Lösung von nach Prileschajew dargestellten Benzoylhydroperoxyd, wurde der Einwirkung des Katalysators während eines bestimmten Zeitraumes ausgesetzt, wonach dann der unzersetzte Rest an Hydroperoxyd durch Titration bestimmt wurde. Die Ergebnisse gibt Tab. 5 wider.

Die Konzentration der Benzoylhydroperoxydlösung wurde durch Titration festgestellt. Das Benzoylhydroperoxyd ist in Lösung unbeständig und zersetzt sich beim Stehen.

Doch wird diese Zersetzung durch die Anwesenheit von Pt und MnO_2 beschleunigt, wobei Pt stärker als MnO_2 wirkt.

Zusammenfassung

1) Entgegen der in der Literatur verbreiteten Meinung,[1] kann die Tatsache einer katalytischen Zersetzung von Benzoylperoxyd und Benzoylhydroperoxyd durch platin als von uns sicher festgestellt gelten.

[1] A. Bayer und V. Villiger. Ber., 33 (2), 1569, 1910.

2) Ist die gleichfalls von uns festgestellte Tatsache hervorzuheben, dass die Anwesenheit von H_2O für die katalytische Wirkung unerlässlich ist. Diese Tatsache scheint auf den ersten Blick hin die in der Literatur verbreitete Meinung über die Inaktivität des Benzoylperoxyds zu bestätigen.

Nach der Meinung von Prileschajew[1] verlaufen alle Reaktionen mit Benzoylperoxyd so, dass zuerst Hydrolyse unter Bildung von Benzoylhydroperoxyd eintritt, welch letzteres dann weiter reagiert. Doch führt eine kritische Gegenüberstellung der experimentellen Daten zu gänzlich entgegengesetzten Folgerungen.

Die Tatsache, dass MnO_2 Benzoylhydroperoxyd zersetzt, während es auf Benzoylperoxyd nicht wirkt, scheint uns die Ansicht, dass die Reaktion über das Benzoylhydroperoxyd verläuft, genügend zu widerlegen; widrigenfalls müsste das auf das Benzoylhydroperoxyd wirkende MnO_2 die Zersetzung des Benzoylperoxyds hervorrufen: ein solcher Mechanismus der Reaktion in Gegenwart eines Katalysators das in Wasser schwerlösliche Benzoylperoxyd zum allmählichen Zerfall führen müsste, wobei dann immer neue Mengen in Lösung gehen.

Es ist klar, dass, wenn schon eine geringe, im Aether enthaltene Menge H_2O Hydrolyse hervorrufen kann, dass dann beim Schütteln von Benzoylperoxyd mit H_2O die Bedingungen für eine Hydrolyse wahrscheinlicher werden. Doch gab der in dieser Richtung durchgeführte Versuch negative Ergebnisse.

Wir glauben daher, den Mechanismus der Reaktion über das Benzoylhydroperoxyd ablehnen zu können.

3) Mit grosser Vorsicht muss die von uns festgestellte Tatsache, — das Fehlen einer katalytischen Wirkung von MnO_2-Pulver auf Benzoylperoxyd — diskuttiert werden.

Wir stellen lediglich fest, dass das von uns benutzte feine MnO_2-Pulver, Kahlbaum, trotz seiner Aktivität im Falle von H_2O_2 und Benzoylhydroperoxyd, gegenüber Benzoylperoxyd völlige Inaktivität zeigte.

Möglicherweise hängt dies mit dem Fallen des Reduktionsvermögens des Benzoylperoxyds zusammen, da es bekannt ist, dass die Aktivität des MnO_2 durch die Anwesenheit niederer Oxyde des Mn (Mn_2O_3, MnO) erhöht wird, die sich unter den gegebenen Bedingungen im Falle des Benzoylperoxyds nicht bilden können.

Auf die Möglichkeit einer solchen Diskussion weist auch die von uns jetzt beobachtete katalytische Wirkung von aus $KMnO_4$ und $MnSO_4$ erhaltenem MnO_2.

Doch sind dies nur Vorversuche und bilden als solche die nächste Aufgabe zur Erforschung dieser Erscheinungen.

Auf jeden Fall weist die Tatsache eines Fehlens von katalytischer Wirksamkeit seitens reinen MnO_2 auf eine spez. Beziehung zwischen der chemischen Zusammensetzung des Katalysators und dem Bau des zu katalysierenden Stoffes hin. Dies weist auch die Wege einer weiteren Erforschung der Katalyse organischer Peroxyde im Zusammenhang mit ihrem Bau und chemischen Eigenschaften einerseits und mit Zusammensetzung und chemischen Eigenschaften des Katalysators andererseits.

Zum Schluss sprechen wir Akad. L. W. Pissarjewsky für seine Anleitung und das der Arbeit entgegengebrachte Interesse unseren herzlichsten Dank aus.

Physikalisch-Chemisches Institut
Dnjepropetrowsk
14 I 1934

---

[1] N. Prileschajew. Journal der Russischen Physikalisch-Chemischen Gesellschaft, Bd. XLI, Lieferung 8, 1887.

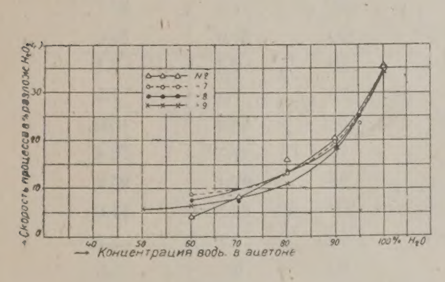
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ВЛИЯНИЕ РАСТВОРИТЕЛЯ НА СКОРОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ H_2O_2 ПЛАТИНОЙ. II

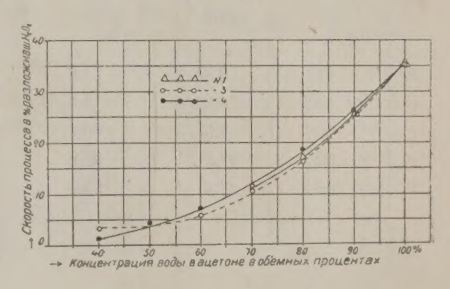
Т. С. ГЛИКМАН

(Представлено академиком Л. В. Писаржевским[1]*)*

В первой части нашей работы под влиянием растворителя была найдена зависимость скорости разложения H_2O_2 в эфире от различного содержания в нем воды. Но так как растворимость воды в эфире крайне ограничена (1.2%), то представляло интерес исследовать ту же реакцию в растворителе, смешивающемся с водой во всех отношениях. С этой целью был взят растворитель — ацетон.



Фиг. 1



Фиг. 2

Постановка опыта

Готовился ряд растворов H_2O_2 в ацетоне с различным содержанием воды (от 5% до 100% воды). Катализатор — платинированная платиновая пластинка.

Концентрация H_2O_2 измерялась титрованием 0.1—0.2N $KMnO_4$. Скорость процесса выражена в процентах разложившейся, за время опыта, перекиси.

Результаты (см. табл. 1) нанесены на кривые (фиг. 1 и 2).

Специально поставленные опыты с вращающимся катализатором (100—120 оборотов в минуту) не дают изменений скорости процесса, по сравнению с неподвижным катализатором.

[1] 9 июля 1934 г.

b) небольшие изменения концентрации растворенной воды в эфире (0.7—1.2%) дают колоссальные изменения скорости процесса (в 20—30 раз), для получения того же эффекта в ацетонном растворе необходимы изменения в концентрации воды значительно большего порядка (от 20% до 80%) воды в ацетоне, и

c) в эфирном растворе с содержанием воды 1.2% скорость процесса наибольшая, даже больше, чем в чистоводном растворе, т. е. кривая зависимости скорости от содержания воды в эфире — имеет точку перегиба.

Приношу глубокую благодарность академику Льву Владимировичу Писаржевскому за руководство и помощь в работе.

Украинский институт
Физической химии.
Днепропетровск.

T. GLÜCKMANN. DER EINFLUSS DES LÖSUNGSMITTELS AUF DIE GESCHWINDIGKEIT DER ZERSETZUNG VON H_2O_2 DURCH PLATIN. II

ÜBERSETZUNG

Im ersten Teil der Arbeit über den Einfluss des Lösungsmittels fanden wir die Abhängigkeit der Zersetzungsgeschwindigkeit von H_2O_2 im Äther vom verschiedenen Wassergehalt desselben. Da aber die Löslichkeit von Wasser in Äther sehr gering ist (1.2%), so war es von Interesse, diese Reaktion in einem Lösungsmittel zu untersuchen, das sich mit Wasser in jedem Verhältnis mischt. Zu diesem Zweck wurde als Lösungsmittel Aceton benutzt.

Versuchsanordnung

Es wurden Lösungen von H_2O_2 in Aceton mit verschiedenem Wassergehalt (von 5% bis 100% Wasser) hergestellt. Als Katalysator wurde eine platinierte Platinplatte benutzt.

Die Konzentration des H_2O_2 wurde durch Titration mit 0.1—0.2n $KMnO_4$ bestimmt. Die Reaktionsgeschwindigkeit wurde in % des während des Versuches zersetzten H_2O_2 ausgedrückt.

Die Ergebnisse (siehe Tabelle 1, S. 1594) sind auf Kurven aufgetragen (S. 1593).

Besondere Versuche, die mit einem rotierenden Katalysator (100—120 Umdrehungen in der Minute) angestellt wurden, ergaben keine Änderung der Reaktionsgeschwindigkeit gegenüber dem feststehenden Katalysator. Auf die Lage der Kurven zur Abszisse hat teilweise auch die Aktivität des Katalysators (die für verschiedene Kurven verschieden ist) Einfluss. Um diesen Einfluss zu eliminieren (damit alle Kurven in einem Punkt beginnen) wurde folgende Umrechnung vorgenommen: die Geschwindigkeit der Reaktion in wässriger Lösung für die Kurve № 2 (siehe Tabelle 1) 35% während der Versuchzeit (5 Min.) des zersetzten H_2O_2 wurde als Einheit der Aktivität des Katalysators angenommen. Alle Werte der Geschwindigkeiten für die anderen Kurven, mit geringerer Aktivität des Katalysators, wurden mit der entsprechenden Berichtigung